MODELO MATRICIAL PARA LA CONSTRUCCIÓN DEL DIAGRAMA DE HASSE DE UN CONJUNTO PARCIALMENTE ORDENADO

Pedro Raúl Acosta De la Cruz
Universidad de Ciencia Aplicadas (UPC) - Perú
pcmapaco@upc.edu.pe

Campo de investigación: Modelación matemática. **Nivel Educativo**: Superior.

Palabras claves: Conjunto Parcialmente Ordenado, Relación de Orden Parcial, Diagrama de Hasse, Matrices Booleanas.

Keywords: Partly sorted set, Partial Order Relationship, Hasse diagram, Boolean Matrices.

Resumen

El trabajo de investigación tuvo como objetivo el diseño de un modelo matricial para la construcción del diagrama de Hasse de un Conjunto Parcialmente Ordenado (CPO), que permita su implementación en un lenguaje de programación. Para lograrlo se utilizó la teoría de Relaciones de Orden Parcial, sus propiedades; matrices booleanas, sus operaciones. Este trabajo permitió determinar el diagrama de Hasse de Relaciones de Orden Parcial sin importar la cantidad de elementos del CPO, y lo más importante, permitió automatizar el modelo.

Abstract

The research work was aimed at the design of a matrix model for the construction of the Hasse diagram of a Partially Ordained Set (CPO), which allows its implementation in a programming language. To achieve this, we used the theory of partial order relations, their properties; Boolean matrices, their operations. This work allowed to determine the Hasse diagram of Partial Order Relations regardless of the number of elements of the CPO, and most importantly, allowed to automate the model.

Introducción

Un diagrama de Hasse es una representación gráfica simplificada de un Conjunto Parcialmente Ordenado (CPO) finito. Esto se consigue eliminando información redundante del diágrafo (gráfica dirigida) de un CPO. Para ello se dibuja una arista ascendente entre dos elementos solo si uno sigue a otro sin haber otros elementos intermedios. La Figura 1 muestra el dígrafo de un CPO y la Figura 2 su respectivo diagrama de Hasse.

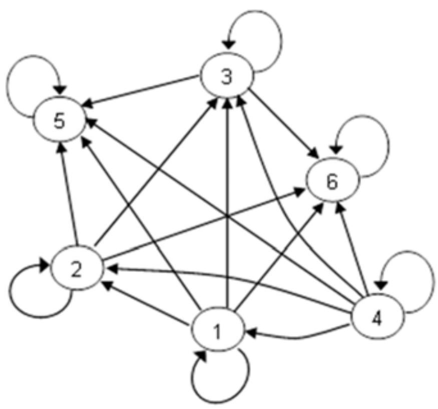

Figura 1. Dígrafo de un CPO

Figura 2. Diagrama de Hasse

Como podemos observar en la Figura 2, se observar una estructura de orden vista de abajo hacia arriba, lo cual no se visualiza en la Figura 1. El diagrama de Hasse permite

diferenciar que elementos del CPO tienen un orden secuencial y cuales pueden estar en forma paralela o independiente.
Para el desarrollo de éste trabajo se presentan los siguientes puntos. El primer punto que veremos es el marco teórico sobre cual trabajaremos los CPO. En segundo punto plantearemos la problemática del método gráfico para la obtención del diagrama de Hasse de un CPO, cunado éste posee un gran número de elementos. En el tercer punto mostraremos la propuesta un modelo matricial para obtener el diagrama de Hasse de un CPO sin importar el número de elementos o cuan complejo sea. Como cuarto punto veremos un ejemplo de aplicación del modelo matricial a un CPO. Finalmente terminaremos con las conclusiones obtenidas en este trabajo.

Marco teórico

Relación de Orden Parcial.- Una relación R en un conjunto A es un Oren Parcial, si es reflexiva, antisimétrica y transitiva [Kolman página 225].
Diagrama de Hasse de una relación de Orden Parcial.- El Diagrama de Hasse a partir del Dígrafo de una relación de Orden Parcial, se obtiene: 1) eliminando las aristas que hacen reflexivo el dígrafo; 2) eliminando las aristas que hacen transitivo el dígrafo; 3) dibujando nuevamente, de tal manera que las flechas apunten hacia arriba y 4) finalmente no se dibuja la cabeza de la flecha y los elementos se representan solo con puntos [Kolman página 230].
Matrices Booleanas.- Una matriz booleana es una matriz m × n cuyas entradas son ya sea cero o uno [Kolman página 35].
Producto booleano de matrices.- el producto booleano de las matrices denotado por $A_{m\times p} \odot B_{p\times n}$, es la matriz $C_{m\times n}$ [Kolman página 36], que se define por

$$c_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } a_{ik} = b_{kj} = 1 \text{ para algún } k,\ 1 \le k \le p \\ 0 & \text{de lo contrario} \end{cases}.$$

Problemática del método gráfico

Para una mejor comprensión de la problemática del método gráfico apliquemos el mismo a un caso concreto.
Consideremos el dígrafo de un CPO (ver Figura 3)

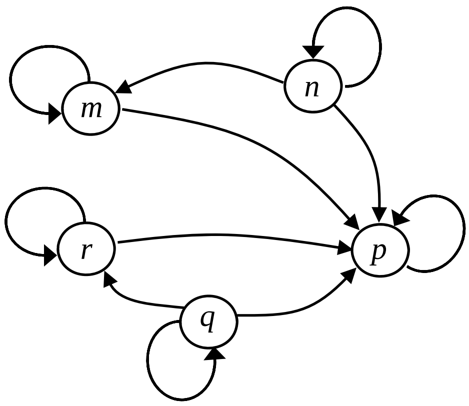

Figura 3. Dígrafo de un CPO

Aplicando el método gráfico indicado en el marco teórico tenemos:

Paso 1. Eliminando las aristas que hacen reflexivo el dígrafo (ver Figura 4):

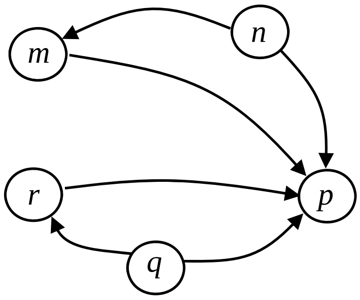

Figura 4. Paso 1

Paso 2. Eliminando las aristas que hacen transitivo el dígrafo (ver Figura 5):

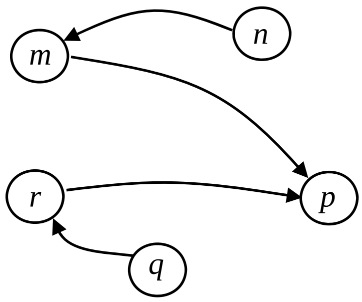

Figura 5. Paso 2

Pasos 3 y 4. Dibujando nuevamente, de tal manera que las flechas apunten hacia arriba y finalmente no se dibuja la cabeza de la flecha y los elementos se representan solo con puntos (ver Figura 6):

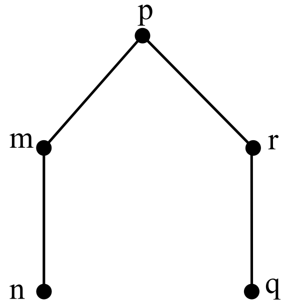

Figura 6. Pasos 3 y 4

Podemos observar que el método gráfico es simple de aplicar, pero que ocurría si tenemos un mayor número de elementos (ver Figuras 7), para estos casos, éste método sería complicado de emplear. Esta dificultad de poder utilizar el método gráfico para dígrafos más complejo, motivó el presente trabajo. El trabajo de investigación buscó un modelo matemático que sin importar cuan complejo sea el dígrafo del CPO, siempre se pudiera traza el diagrama de Hasse correspondiente, más aún, que este modelo se pudiera automatizar (implementar en un lenguaje de programación).

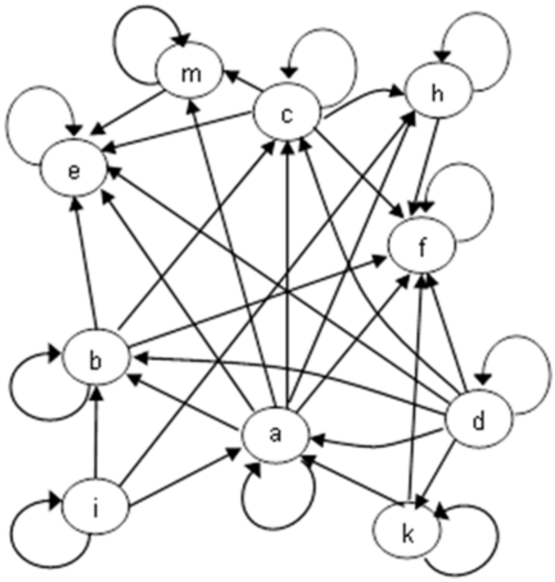

Figura 7.

A continuación mostramos el modelo matemático que permite trazar el diagrama de Hasse de un CPO sin importar el número de vértices.

Modelo Matricial
El modelo matricial para la obtención del diagrama Hasse de un CPO, consiste de los siguientes pasos:

Paso 1: Construir la matriz M ($M = [m_{ij}]$) que representa a la relación de Orden Parcial.

Paso 2: Construir la matriz M_1 que consiste de los elementos de la matriz M, donde los elementos de la diagonal principal son todos ceros ($m_{ij} = 0$).

Paso 3: Construir la matriz M_2 que resulta del producto booleano de M_1 por M_1 ($M_2 = M_1 \odot M_1$).

Paso 4: Construir la matriz M_3 que resulta de M_1, donde se han eliminado los unos de M_1 en las posiciones (i, j) que coincidan con los unos de M_2 que coincidan con las posiciones (i, j).

Paso 5: De la matriz M_3 elegir vértices k de las columnas nulas.

Paso 6: Para dibujar el diagrama de Hasse, ubique en la parte inferior los vértices k. A partir de esto vértices trace los arcos (k, j) hacia arriba (de forma vertical u oblicua) empleando la matriz M_3.

Aplicación
Sea $A = \{m, n, p, q, r\}$ y una relación de orden parcial sobre el conjunto A, cuyo dígrafo se muestra en la Figura 8.

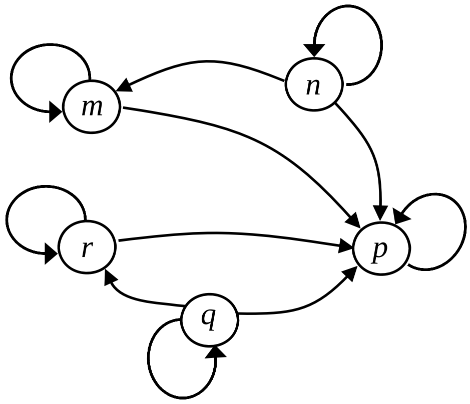

Figura 8. Dígrafo de un CPO

Aplicando el método:

Paso 1: $M = \begin{array}{c} \\ m \\ n \\ p \\ q \\ r \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} m & n & p & q & r \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$

Paso 2: $M_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Paso 3: $M_2 = M_1 \odot M_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$\textbf{Paso 4}:\ M_3 = \begin{array}{c} \\ m \\ n \\ p \\ q \\ r \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} m & n & p & q & r \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Paso 5: Los vértices con columnas nulas son: n y q

Paso 6: Trazando el diagrama de Hasse. Empleando la matriz M_3 de n trazamos el arco (n, m), luego el arco (m, p); a partir de q trazamos el arco (q, r), luego el arco (r, p). Así obtenemos la gráfica (diagrama de Hasse) de la Figura 9.

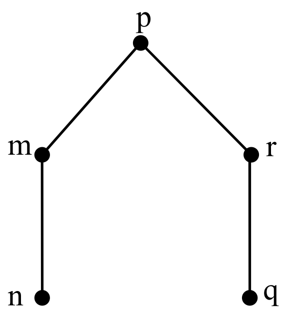

Figura 9.

Conclusiones

Las principales conclusiones de este método son:

- Permite determinar el diagrama de Hasse de diágrafos complejos (no importa cuán compleja sea la redundancia de datos).
- Permite ser implementado en cualquier lenguaje de programación, lo cual implica la automatización del método.
- Aplica la teoría de la las relaciones de orden parcial y de las propiedades y operaciones de las matrices booleanas.

Referencias

Kolman B., Busby R. (1997). *Estructuras de matemáticas discretas para la computación*. México: Pearson Educación.

Johnsonbaugh R. (2005). *Matemáticas Discretas Sexta edición.* México: Pearson Educación.