UNIVERSIDAD PERUANA DE CIENCIAS APLICADAS

FACULTAD DE INGENIERÍA

PROGRAMA ACADÉMICO DE INGENIERÍA CIVIL

**Aplicación de teorías no locales en el análisis de vigas cantiléver y continua mediante el
método de los elementos finitos**

TESIS

Para optar el título profesional de Ingeniero Civil

AUTOR(ES)

Garbin Turpaud, Fernando (0000-0001-8201-6564)

Lévano Pachas, Ángel Alfredo (0000-0003-0285-8003)

ASESOR

Arciniega Alemán, Román Augusto (0000-0002-4284-4389)

Lima, 13 de setiembre de 2020

DEDICATORIA

*A nuestros padres, hermanos,
y a la memoria de aquellos
que amamos y ya no están
con nosotros.*

AGRADECIMIENTOS

Si tuviéramos que mencionar a todas las personas que alguna vez nos apoyaron, creyeron en nosotros y tuvieron significancia en nuestras vidas, esta tesis solo serían nombres.

Sin embargo, nos gustaría expresar nuestra sincera gratitud al Dr. Román Arciniega, nuestro asesor principal de la presente tesis, no sólo por sus lineamientos y soportes teóricos, sino por su inquebrantable compromiso con nosotros y nuestro trabajo y por las innumerables enseñanzas de superación personal, razones principales que nos permitieron llevar a cabo el presente proyecto.

Asimismo, estamos muy agradecidos con el Dr. Guillermo Huaco por su guía constante durante la elaboración progresiva de nuestra tesis y sus sugerencias y aportes en la misma.

Un agradecimiento especial a nuestra familia y amigos, quienes siempre nos apoyaron para que estudiemos una carrera y que diésemos lo mejor de nosotros.

RESUMEN

En el presente estudio, se propone un análisis lineal de Elementos Finitos de vigas cantiléver y continuas bajo un enfoque no local mediante la Teoría de Primera Deformación Por Corte (FSDT), la cual permita desarrollar de mejor manera el análisis de los efectos de corte (esfuerzos y deformaciones) que ocurren en la sección transversal de la viga.

En primer lugar, se define el campo de desplazamientos correspondiente a la Teoría FSDT logrando, mediante expansión de Taylor, una aproximación cuadrática del componente de desplazamiento en el eje z . Luego, se define con aproximación lineal el campo de deformaciones. Posteriormente, se plantea el Principio de los Trabajos Virtuales para desarrollar la formulación débil correspondiente a la Teoría FSDT, introduciendo los modelos de elementos finitos por cada parámetro desconocido, tomando en cuenta que el grado de las funciones de aproximación. Se realizan casos de estudio y se analizan los resultados.

Palabras Claves: Notación indicial, Mecánica de Medios Continuos, Método de los Elementos Finitos, Teorías no locales

ABSTRACT

In the present study, a Linear Finite Element Analysis for cantilever and continuous beams under a nonlocal approach applying the First Shear Deformation Theory (FSDT) is proposed, which allows us to develop in a better way the analysis of shear effects (strains and stresses) that occurs in the cross-section of the beam.

As a first step, we define the displacement field of the FSDT Theory by assuming a quadratic approximation of z-axis displacement component. Then, we use a linear approximation of Green-Lagrange strain components. After that, Virtual Work Principles is used to develop the weak form corresponding to FSDT Theory, including finite element models per each unknown parameter and taking into account the approximation function order. Study cases are carried out and its results are analyzed.

Keywords: Dummy index, Continuum Mechanics, Finite Element Method, Non-local Theories

INDICE

DEDICATORIA	2
AGRADECIMIENTOS	3
RESUMEN	4
ABSTRACT	5
INDICE	6
ÍNDICE DE TABLAS	10
ÍNDICE DE FIGURAS Y GRÁFICOS	11
INTRODUCCIÓN	16
1 MARCO TEÓRICO	24
1.1 Teoría del Medio Continuo	24
1.1.1 Introducción a la Mecánica de Medios Continuos.	24
1.1.2 Matemática esencial.	25
1.1.2.1 Vectores	25
1.1.2.2 Tensores	29
1.1.2.2.1. Tensor Gradiente Deformación	30
1.1.3. Principios de esfuerzos	31
1.1.3.1. Vector y tensor de esfuerzos y postulado de esfuerzos de Cauchy.	32
1.1.3.2. Estado plano de esfuerzos.	35
1.1.4 Relaciones cinemáticas.	37
1.1.5 Relaciones constitutivas.	39
1.2 Teorías de vigas utilizadas.	41
1.2.1 Teoría de vigas de Euler-Bernoulli.	42
1.2.2 Teoría de vigas de Timoshenko.	43
1.2.3 First Shear Deformation Theory (FSDT).	45
1.2.3.1. Teoría refinada sobre placas	45
1.3 Método de los Elementos Finitos (FEM).	47

1.3.1. Concepto básico del FEM.....	47
1.3.2. Idealización unidimensional de una viga	48
1.3.3. Discretización del dominio.....	50
1.3.4 Ecuaciones de los elementos.	52
1.3.4.1. Formulación débil.....	53
1.3.4.2 Funciones de aproximación.	55
1.3.4.2 Modelo de elementos finitos.	58
1.3.5 Métodos Variacionales de Aproximación.	60
1.3.5.1 Método de colocación.....	60
1.3.5.2 Método de mínimos cuadrados (Least-squares).....	60
1.3.5.3 Método de Galerkin	61
1.3.5.4 Polinomios de interpolación de Lagrange	61
1.3.5.5 Función de aproximación nodal espectral	61
1.3.6 Integración Numérica	62
1.3.6.1 Regla del Trapecio Simple	62
1.3.6.2 Regla del Trapecio Múltiple	62
1.3.6.3 Regla de Simpson	63
1.3.6.4 Cuadratura de Gauss 2 puntos.....	63
1.3.6.4.1 Ejemplo obtenido del libro de Chapra y Canale	64
1.3.6.4.2 Cuadratura de Gauss de múltiples puntos	66
1.4. Principios de energía y trabajo	67
1.4.1. Principio de Energía Potencial Total Estacionaria (PEPE).....	68
1.4.2. Principio de los Trabajos (Desplazamientos) Virtuales (PTV).....	68
1.4.3. Desarrollo de la formulación débil.....	69
1.5 Teorías de No-Localidad.	72
1.5.1. Conceptos básicos.....	72
2 METODOLOGÍA	75
2.1. Método	75

2.2. Nivel de investigación	76
2.3. Diseño de investigación	76
2.4. Técnicas de Procesamiento y Análisis de datos	77
3 METODOLOGÍA DE CÁLCULO	77
3.1. Formulación débil general bajo enfoque local	77
3.1.1 Desarrollo matemático de los esfuerzos resultantes	79
3.1.2 Obtención general de los esfuerzos resultantes	81
3.2 Caso Timoshenko.	83
3.2.1. Formulación Débil.	83
3.2.2. Modelo de Elementos Finitos.	84
3.3. Caso First Shear Deformation Theory	87
3.3.1. Formulación Débil.	89
3.3.2 Modelo de Elementos Finitos.	90
3.4. Formulación débil bajo mediante la aplicación de Teorías no locales	95
3.4.1. Caso Timoshenko.	95
3.4.2. Caso First Shear Deformation Theory	101
4. RESULTADOS	105
4.1 Aplicación del Análisis Lineal Local a través del método de los elementos Finitos.....	105
4.1.1 Verificación de los resultados	105
4.1.2 Resultados Numéricos	106
4.1.2.1 Ejemplo 1	106
4.1.2.2 Ejemplo 2	107
4.1.2.3 Ejemplo 3	108
4.1.2.4 Ejemplo 4	109
4.2 Aplicación del Análisis Lineal No Local a través del método de los elementos Finitos	110
4.2.1 Verificación de los resultados	111
4.2.2 Resultados Numéricos	111
4.2.2.1 Ejemplo 5	111

4.2.2.2 Ejemplo 6	113
4.2.3 Otros Resultados.....	116
4.2.3.1 Ejemplo 7: Viga Cantiléver bajo carga distribuida uniforme	116
4.2.3.2 Ejemplo 8: Viga simplemente apoyada de dos tramos sometida a carga distribuida uniforme.....	117
4.2.3.3 Ejemplo 9: Viga Empotrada-Simplemente apoyada.....	118
5. PLANTEAMIENTO ACADÉMICO.....	121
5.1 Temática básica	121
5.2 Futuras Líneas de Investigación	122
CONCLUSIONES	123
RECOMENDACIONES.....	125
REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS	126
ANEXOS.....	130

ÍNDICE DE TABLAS

<i>Tabla1. Valores de los parámetros a utilizar para la cuadratura de Gauss dependiendo el número de puntos. Adaptado de <<Métodos numéricos para ingenieros>> por Chapra & Canale, (2007) .....</i>	<i>66</i>
<i>Tabla 4.2.1. Deflexiones centrales en una viga bi-empotrada. ....</i>	<i>115</i>
<i>Tabla 4.2.2. Deflexiones centrales en una viga empotrada en un extremo y simplemente apoyada en el otro.....</i>	<i>115</i>
<i>Tabla 4.2.3. Deflexiones centrales en una viga simplemente apoyada .....</i>	<i>115</i>
<i>Tabla 4.2.4. Máximas deflexiones en el extremo libre de la viga sin considerar efecto de Poisson. ....</i>	<i>116</i>
<i>Tabla 4.2.5. Máximas deflexiones en el extremo libre de la viga con un valor de $v = 0.30$.....</i>	<i>117</i>
<i>Tabla 4.2.6. Deflexiones centrales de cada tramo de viga sin considerar efecto de Poisson.....</i>	<i>117</i>
<i>Tabla 4.2.7: Deflexiones centrales de cada tramo de viga considerando un valor de $v = 0.30$. ....</i>	<i>118</i>
<i>Tabla 4.2.8. Deflexión en el centro del primer tramo y en el extremo libre del elemento cuando $v = 0$.....</i>	<i>119</i>
<i>Tabla 4.2.9. Deflexión en el centro del primer tramo y en el extremo libre del elemento cuando $v = 0.30$.....</i>	<i>119</i>

ÍNDICE DE FIGURAS Y GRÁFICOS

<i>Figura 1.1.1a. Vectores unitarios en las direcciones coordenadas X_1, X_2 y X_3.</i>	
<i>Adaptado de << Continuum Mechanics for Engineers >>, por Mase & Mase, (1999).</i>	<i>26</i>
<i>Figura 1.1.1b. Vectores unitarios en las direcciones coordenadas X_1, X_2 y X_3.</i>	
<i>Adaptado de <<Continuum Mechanics for Engineers>>, por Mase & Mase, (1999).</i>	<i>. 26</i>
<i>Figura 1.1.2. Representación gráfica del sistema mostrando la configuración de referencia y la configuración actual. Adaptado del libro « Mecánica de medios continuos para ingenieros», por Olivella & Agelet de Saracíbar, (2002).....</i>	<i>28</i>
<i>Figura 1.1.3. Representación gráfica del entorno diferencial entre un punto P y Q en el instante de referencia y sus homólogos en el instante actual. Adaptado del libro « Mecánica de medios continuos para ingenieros», por Olivella & Agelet de Saracíbar, (2002). ....</i>	<i>30</i>
<i>Figura 1.1.4. (a) Un cuerpo soportado en varios puntos de la superficie y sujeto a un número de fuerzas, cortado en un punto por planos de diferente orientación. (b) Vector de esfuerzos en un plano normal al eje x y sobre un plano con vector unitario n para un elemento con carga axial. Adaptado de <<Principles of Continuum Mechanics>>, por Reddy, (2010a). ....</i>	<i>33</i>
<i>Figura 1.1.5. Elemento tetraédrico con vectores de esfuerzos sobre sus cuatro caras. Adaptado de <<Principles of Continuum Mechanics>>, por Reddy, (2010a).....</i>	<i>34</i>
<i>Figura 1.1.6. Desarrollo del vector de esfuerzos y sus respectivas componentes en coordenadas cartesianas. Adaptado de <<Principles of Continuum Mechanics>>, por Reddy, (2010a) .....</i>	<i>35</i>
<i>Figura 1.1.7 (a). Estado plano de esfuerzos considerando a X_3 como eje neutro. Adaptado de <<Continuum Mechanics for Engineers>>, por Mase & Mase, (1999). .</i>	<i>36</i>
<i>Figura 1.1.7 (b). Círculo de Mohr del estado plano de esfuerzos con X_3 como eje neutro. Adaptado de <<Continuum Mechanics for Engineers>>, por Mase & Mase, (1999). ....</i>	<i>36</i>

Figura 1.1.8. Forma representativa del desplazamiento de un punto antes y después de la deformación del cuerpo. Adaptado de << Continuum Mechanics for Engineers >>, por Mase & Mase, (1999).....	37
Figura 1.1.9. Puntos P y Q separados una distancia dX en la configuración indeformada K_0 adoptan nuevas posiciones P y Q en la configuración deformada K, separados entre sí por dx. Adaptado de << Continuum Mechanics for Engineers >>, por Mase & Mase, (1999).	38
Figura 11.2.1. Comparación de la deformación transversal de vigas de acuerdo a las teorías EBT y TBT. Adaptado de Shear Deformable Beams and Plates>>, por C .M Wang; J. N Reddy; K .H Lee, (2000).....	42
Figura 1.2.2. Representación de la teoria de Euler-Bernoulli en donde la sección permanece rígida y perpendicular al eje neutro. Adaptado de <<Structural Analysis with applications to aerospace structures (solid mechanics and its applications)>> por Bauchau & Craig, (2009).....	42
Figura 1.2.3. Representación de la teoría de y sus consideraciones cinemáticas. Adaptado de << Dynamics of Fluidconveying Beams)>> Reddy & Wang, (2014)	44
Figura 1.2.4. Representación de la teoria FSDT en donde la sección sufre deformaciones por corte y deformaciones axiales. Adaptado de << Mechanics of laminated composite plates and shells: theory and analysis>> por J.N. Reddy, (2003).	46
Figura 1.3.1. Discretización del dominio. Adaptado de <<An Introduction to Nonlinear Finite Element Analysis>> por Reddy, (2004)	48
Figura 1.3.2. Deformación axial de una viga. Adaptado de <<An Introduction to the Finite Element Method>> por J.N. Reddy, (2005).	49
Figura 1.3.3. Idealización matemática del problema. Adaptado de <<An Introduction to the Finite Element Method>> por J.N. Reddy, (2005).	50
Figura 1.3.4. Aproximación de la circunferencia. Adaptado de <<An Introduction to the Finite Element Method>> por J.N. Reddy, (2005).	51

Figura 1.3.5. (a) Dominio. (b) Discretización por elementos finitos. Adaptado de <<An Introduction to the Finite Element Method>> por J.N. Reddy, (2005).	52
Figura 1.3.6. (a) Discretización de elementos finitos de un dominio unidimensional. (b) Elemento finito con las respectivas variables primaria (u) y secundaria (Q) en sus nodos. Adaptado de <<An Introduction to the Finite Element Method>> por J.N. Reddy, (2005).	54
Figura 1.3.7. (a) Aproximación lineal. (b) Aproximación cuadrática. Adaptado de <<An Introduction to the Finite Element Method>> por J.N. Reddy, (2005).	56
Figura 1.3.8. (a) Funciones lineales de interpolación. (b) Aproximación lineal de elementos finitos. Adaptado de <<An Introduction to the Finite Element Method>> por J.N. Reddy, (2005).	57
Figura 1.3.9. Elemento unidimensional cuadrático de Lagrange y sus funciones de interpolación. (a) Geometría del elemento. (b) Funciones de interpolación. Adaptado de <<An Introduction to the Finite Element Method>> por J.N. Reddy, (2005).	58
Figura 1.4.1. Movimiento de una partícula bajo la acción de una fuerza.. Adaptado de <<Energy Principles and Variational Methods in Applied Mechanics>> por Reddy, 2002.	67
Figura 3.1 Esquema del Improved First Shear Deformation Theory mostrando los ejes de referencia a utilizar. Fuente propia.	88
Figura 4.1.1. Representación del deformación de una viga cantilever Adaptado <<Engineering Mechanics for Structures>>, por Bucciarelli, (2009).	105
Figura 4.1.2. Representación del deformación de una simplemente apoyada <<Engineering Mechanics for Structures>>, por Bucciarelli, (2009).	106
Figura 4.1.3. Problemas a resolver para el caso 1. Adaptado de << A new displacement-based framework for non-local Timoshenko beams >> por Failla, Sofi, & Zingales, (2015).	106
Grafico 4.1.1. Resultado del procesamiento en Matlab del problema 1. Fuente Propia	107

Figura 4.1.4. Problemas a resolver para el caso 2. Adaptado de << A new displacement-based framework for non-local Timoshenko beams >> por Failla, Sofi, & Zingales, (2015).....	107

Grafico 4.1.2. Resultado del procesamiento en Matlab del problema 2. Fuente Propia	108

Figura 4.1.5. Problemas a resolver para el caso 3. Adaptado de << Ritz Method Application to Bending, Buckling and Vibration Analyses of Timoshenko Beams via Nonlocal Elasticity >> por Mahdi, 2018	108

Grafico 4.1.3. Resultado del procesamiento en Matlab del problema 3. Fuente Propia	109

Figura 4.1.6. Problemas a resolver para el caso 4. Adaptado de << Ritz Method Application to Bending, Buckling and Vibration Analyses of Timoshenko Beams via Nonlocal Elasticity >> por Mahdi, 2018	109

Grafico 4.1.4. Resultado del procesamiento en Matlab del problema 4. Fuente Propia	110

En los Gráficos 4.1.1 al 4.1.4 se han considerado modelos matemáticos cuyos grados de polinomios de interpolación son relativamente menores ($P = 2$ y 3). Las configuraciones deformadas correspondientes a dichos polinomios se aprecian rígidas en comparación con aquellas en las que se usaron polinomios de mayor orden. Reddy (2015) identifica este fenómeno como “Shear Locking”, muy frecuente cuando se utilizan polinomios de interpolación de menor orden, ya que estos afectan a los grados de libertad w y φ_1, provocando que la pendiente dw/dx sea igual a $-\varphi_1$, lo cual a su vez se traduce en desplazamientos y rotaciones nulas, produciéndose el denominado shear locking. El mismo autor plantea que, para evitar este fenómeno, se debe incrementar el grado del polinomio de interpolación.	110

Figura 4.2.1. Condiciones de borde para diferentes ejemplos numéricos. a) Viga simplemente apoyada, b) Viga bi-empotrada y c) Viga con empotramiento en un extremo y apoyo fijo en el otro extremo.	111

Grafico 4.2.1. Comparación de resultados para una viga simplemente apoyada con una relación $L/H=10$ con la literatura. Fuente Propia.....	112
Grafico 4.2.2. Comparación de resultados para una viga simplemente apoyada con una relación $L/H=20$ con la literatura. Fuente Propia.....	112
Grafico 4.2.3. Comparación de resultados para una viga simplemente apoyada con una relación $L/H=50$ con la literatura. Fuente Propia.....	112
Grafico 4.2.4. Comparación de resultados para una viga simplemente apoyada con una relación $L/H=100$ con la literatura. Fuente Propia.....	113
Grafico 4.2.5. Comparación de resultados para una viga empotrada en ambos lados con (Eltaher et al., 2014). Fuente Propia	114
Grafico 4.2.6. Comparación de resultados para una viga empotrada en un lado y simplemente apoyada en el otro con (Eltaher et al., 2014). Fuente Propia	114
Grafico 4.2.7. Comparación de resultados para una viga simplemente apoyada (Eltaher et al., 2014). Fuente Propia.....	114
Figura 4.2.2. Casos de análisis con diferentes condiciones de borde. a) Viga cantiléver, b) Viga continua de dos tramos y c) Viga empotrada-simplemente apoyada.....	116
Gráfico 4.2.8. Parámetro no-local VS Deflexión central. Fuente Propia.....	118

INTRODUCCIÓN

Desde los inicios, la investigación académica ha sido fundamental para el desarrollo de las personas en el ámbito científico y tecnológico. El campo de la mecánica computacional no es la excepción. En estos tiempos, se ha vuelto común que las estructuras sean cada vez más complejas debido a la constante búsqueda de innovación o por la búsqueda de planteamientos más desarrollados que representen la realidad. Por tal motivo, un análisis estructural convencional puede llegar a ser insuficiente para el caso de estructuras modernas cuya representación computacional no sea lo suficientemente cercana a la realidad.

Para estructuras especiales, se requiere aplicar otros métodos no convencionales para su adecuado análisis estructural, siendo el más apropiado y destacado el Método de los Elementos Finitos.

Uno de los aspectos que influyen en el análisis no convencional de estructuras, y que muchas veces lo despreciamos, es la localidad del análisis. La teoría y formulación matemática general clásica de dicho método asume un comportamiento “Local”, es decir, que cada uno de los puntos se analiza independiente de los otros puntos que conforman un determinado cuerpo, ignorando los efectos un punto ejerce sobre otro. Las teorías de no localidad sí toman en consideración que el comportamiento de un punto en particular se ve influenciado por los efectos que ocurren en ciertos puntos a su alrededor o en el resto del cuerpo (denominado vecindad). Su aplicación en el análisis estructural, como inmediata consecuencia, arrojaría valiosa información que nos permitiría acercarnos mucho más al comportamiento real de la estructura.

En la actualidad y en nuestro medio, se considera que las estructuras presentan un comportamiento lineal tanto en su geometría (pequeñas deformaciones) como en el material (obedecen a la ley de Hooke), lo cual es en gran parte cierto, ya que los parámetros utilizados en el diseño estructural (por ejemplo, módulo de elasticidad) son obtenidos del rango elástico del comportamiento de los materiales (gráfica clásica de esfuerzo vs deformación). Asimismo, sumado a la gran rigidez de los elementos estructurales, se garantiza casi con total seguridad que las fuerzas y cargas que impacten

a la estructura, sean estas en cualquier dirección, le provocarán deformaciones y desplazamientos tan pequeños que son imperceptibles al ojo humano.

El análisis matricial de estructuras es el método más usado en nuestro país, y contempla los parámetros y condiciones del material y geometría estipulados en el párrafo anterior. Dicho análisis se basa en el método de las rigideces (o desplazamientos), el cual es muy sencillo de aplicar y cuya finalidad es encontrar la respuesta de una estructura sometida a un sistema de cargas (en cualquier dirección) mediante el principio de superposición¹, tal y como afirma Kassimali (2010)

Sin embargo, dicho análisis solo es aplicable para estructuras aporticadas (Kassimali, 2011). Para estructuras más complejas, de cualquier aspecto y forma, el análisis se realiza mediante el método de los elementos finitos, metodología no convencional la cual se origina como una extensión del análisis matricial a estructuras continuas y superficiales (como placas y cáscaras). Asimismo, Kassimali (2011) afirma que la diferencia básica entre ambos métodos es que, en el método matricial, las relaciones fuerzas-desplazamiento se basan en las soluciones exactas de las ecuaciones diferenciales subyacentes, mientras que en el método de los elementos finitos (FEM por sus siglas en inglés), dichas relaciones son derivadas mediante principios de energía (PEPE)² y trabajo (PTV)³ sobre funciones asumidas de esfuerzos y desplazamientos, obteniéndose resultados mucho más exactos al comportamiento real de la estructura. Por ello, el FEM es utilizado para la solución de una amplia gama de problemas de ingeniería con cierto grado de complejidad.

No obstante, ambas metodologías (análisis matricial y FEM) parten del principio de que el comportamiento de un determinado punto en una estructura depende exclusivamente de los efectos internos y externos que ocurren en dicho punto (enfoque “local”) lo cual no es totalmente válido, ya que también debería considerarse lo que ocurre en los alrededores de dicho punto (vecindad) para poder obtener información más precisa y exacta del comportamiento real del punto en cuestión y, a una escala macroscópica, de toda la estructura. Ello implica mejorar el enfoque de nuestro análisis estructural

---

¹ La respuesta total de una estructura sometida a un sistema de cargas es equivalente a la suma de las respuestas originadas por cada carga por separado.

² Principio de Energía Potencial total Estacionaria – PEPE

³ Principio de los Trabajos Virtuales - PTV

mediante elementos finitos aplicando otros métodos no convencionales que nos permitan obtener una aproximación más exacta del comportamiento real de una estructura y, como consecuencia, plantear alternativas de análisis más cercanas a la realidad.

Asimismo, un análisis tan complejo como el descrito anteriormente requiere obligatoriamente el uso de herramientas computacionales con capacidad suficiente de procesamiento, lo cual está directamente relacionado con dos factores clave: tiempo y costo. Se debe buscar que dichos factores sean los menores posibles, sin afectar la calidad y precisión del análisis y/o modelamiento computacional de la estructura.

El estudio de elementos tipo viga es muy común en la comunidad científica e ingenieril, ya que son estos elementos los que conforman el diafragma rígido horizontal de las estructuras, soportando las cargas gravitatorias y restringiendo en cierta parte los desplazamientos laterales frente a la acción del sismo. Por ello, es indispensable que su diseño sea óptimo, de manera que pueda soportar a la perfección los esfuerzos y cargas previstas durante la vida útil de la estructura.

El uso de métodos no convencionales en el análisis estructural es un requerimiento que cada día es más solicitado para los futuros profesionales en el campo de la mecánica estructural. Muchas veces su enseñanza se limita a un concepto y su aplicación, más no al proceso que conlleva realizarlo. Académicamente, estos métodos no son temas frecuentes de enseñanza dado que su concepto puede ser difícil de explicar y suelen ser vistos recién en especializaciones del campo.

La presente investigación contempla el análisis estructural computacional de dos tipos de vigas: (1) cantiléver y (2) viga simplemente apoyada de dos tramos. La primera se sabe que, frente a las cargas gravitatorias, presenta la mayor deflexión en su extremo libre, por lo cual se necesita conocer el valor más exacto de dicha deflexión para plantear un diseño adecuado en dicho extremo; mientras que la segunda es muy común usarlas en azoteas como depósitos o almacenes de materiales, así que se deberá realizar un análisis efectivo que permita conocer el comportamiento de dicha viga bajo las cargas que se les impongan.

Ante esta premisa, se propone la aplicación de teorías no locales para el análisis estructural, mediante elementos finitos, de vigas cantiléver y simplemente apoyada.

Debido a la complejidad de la metodología propuesta, se desarrollará una herramienta de cálculo en código Matlab que nos permita aplicar correctamente el análisis.

Aplicación del Método de los Elementos Finitos.

El método de los elementos finitos (FEM por sus siglas en inglés) es uno de los métodos numéricos más usados en el análisis estructural. Muchos investigadores y científicos de renombre resaltan las cualidades de dicho método ya que su aplicación permite reducir el grado de complejidad del análisis estructural en comparación con el uso de otras metodologías, además de garantizar que los resultados obtenidos sean sumamente cercanos a la realidad.

Por ejemplo, Carrera, Zappino, & Li (2018) identifican el elevado costo que implica analizar computacionalmente el comportamiento de los elementos estructurales anisotrópicos de material compuesto. La problemática planteada es importante ya que se sabe muy bien que los elementos estructurales comunes (vigas, columnas, losas, etc.) cuentan con diferentes tipos de materiales en su composición interna y también son anisotrópicos, es decir, sus propiedades son diferentes en todas sus direcciones. Ambas características implican cierto grado de complejidad en el análisis estructural el cual, al momento de realizarlo computacionalmente, origina costos elevados. Por ello los autores plantean modelos altamente refinados en aquellas zonas del elemento donde ocurren los efectos más críticos, empleando modelos de menor orden en el resto del elemento y uniendo todos los modelos matemáticos mediante la Formulación Unificada de Carrera (CUF), metodología derivada del FEM.

Asimismo, Schulz & Asce (2018) menciona que las actuales teorías de elementos finitos aplicadas al análisis de vigas, a pesar de adoptar ciertas asunciones y simplificaciones en su procedimiento (para modelar en 1D), no representan realmente los esfuerzos y deformaciones que ocurren en un modelo 3D. Ello es de gran relevancia en el análisis, ya que al no representar el comportamiento real de una viga en 3D, tampoco se toman en cuenta los efectos por corte que ocurren en la sección transversa de dicho elemento. El autor plantea una nueva metodología, la cual nace de una modificación de la teoría de vigas de Timoshenko, para poder aplicarla al análisis 1D de vigas, comparando los resultados con los análisis 3D de los mismos elementos, en ambos análisis aplicándose el método de los elementos finitos.

Desarrollo de Teorías No-Locales

La teoría de la elasticidad no local según Mahdi Ghannadpour (2018) que fue iniciada formalmente por el artículo de Eringen y ha sido adoptada por muchos investigadores, como se puede ver en la literatura. De acuerdo con la teoría de Eringen, el esfuerzo en cualquier punto del cuerpo depende no solo de la tensión en ese punto, sino también de las tensiones en todos los demás puntos del cuerpo. Esta definición se basa en la teoría atómica de la dinámica de redes y algunas observaciones experimentales. También es importante señalar que la teoría de la elasticidad no local se utilizó en dos formas generales: elasticidad diferencial no local y elasticidad integral no local, pero la primera es más popular debido a su simplicidad.

Según Karličić, Murmu, Adhikari, & McCarthy (2015) la comprensión de la respuesta mecánica de las estructuras a una nano escala (estructuras de pequeña escala de dimensión nanométrica), como flexión, vibración y pandeo, es indispensable para el desarrollo y diseño preciso de nano estructuras como los nanotubos de carbono (CNT) y basados en grafeno nano dispositivos.

Asimismo, según Eringen (2003) las teorías no locales son muy útiles para determinados casos. El primero radica en la proporción de L/l , en donde L es la característica externa como por ejemplo una fisura, mientras que l es una característica interna como por ejemplo la distancia o tamaño granular. Cuando se tiene un $L/l \gg 1$, las teorías locales pueden ser suficientes, sin embargo cuando $L/l \approx 1$, sí es importante el uso de teorías no locales. El segundo caso que plantea depende de un comportamiento más dinámico. Plantea que una relación T/t , en donde T es el tiempo de aplicación de las cargas y t el tiempo de transmisión de una molécula a otra debido a esa carga. De igual manera una relación $T/t \approx 1$ obliga al uso de las teorías no locales.

Las teorías y los módulos de diseño de estructuras en macro escala, facilitados por ingenieros, se basan en modelos continuos clásicos. La teoría de la elasticidad local convencional apuntala la mayoría de las aplicaciones de la mecánica continua en la ciencia aplicada y la ingeniería desde su inicio a principios del siglo XIX.

Sin embargo, la aplicación de la teoría de la elasticidad local en el contexto de objetos a nano-escala ha sido cuestionada repetidamente en varios artículos de investigación

durante la última década. La mecánica del continuo clásico es una teoría libre de efectos de escala y no puede utilizarse en un entorno a nano-escala. La mecánica del continuo convencional no puede predecir los efectos del tamaño, que están presentes a escalas de longitud pequeña. En pequeñas escalas, la microestructura de un material se vuelve cada vez más significativa y su influencia ya no puede ser ignorada.

Uso de herramienta en Matlab

A partir del modelamiento desarrollado por Preethi, Rajagopal, & Reddy (2015) proponen un comportamiento no lineal y no local para vigas Timoshenko. Para resolver el problema, los autores utilizan un código en Matlab para predecir las respuestas estáticas para las vigas.

Hipótesis

Se propone la aplicación de “Teorías de no localidad” para un análisis más completo y detallado de las vigas a estudiar en el presente trabajo. Estas teorías, formuladas por Eringen, plantean que el esfuerzo en cualquier punto de un cuerpo específico depende no solo de la deformación en ese punto, sino también de las deformaciones de los demás puntos alrededor (Mahdi Ghannadpour, 2018). Por consiguiente, la respuesta de los elementos estructural será más precisa, acercándose al comportamiento real, siendo esta teoría útil para la enseñanza en la academia.

Objetivo General

- Proponer la aplicación de teorías no locales en el análisis estructural-computacional, mediante el Método de los Elementos Finitos, de vigas cantiléver y continua de dos tramos con fines académicos.

Objetivos Específicos

- Establecer los parámetros para la formulación y realización de un análisis no local-lineal de vigas mediante el Método de los Elementos Finitos.
- Implementar una herramienta de cálculo en código Matlab para realizar el análisis computacional mediante elementos finitos.

- Implementar en dicho código las formulaciones matemáticas necesarias para teorías no locales.
- Aplicar el análisis lineal únicamente mediante elementos finitos (sin considerar teorías no locales) en diversos ejemplos explicativos, tanto resuelto por otros autores como ejemplos de vigas cantiléver y continuas.
- Aplicar el planteamiento no local para el análisis y compararlos con los ejemplos de la literatura
- Comparar de forma cuantitativa y cualitativa los resultados obtenidos de la aplicación de las metodologías local y no local, ambos mediante el Método de los Elementos Finitos.
- Verificar y comparar resultados presentados de las vigas cantiléver y continuas.
- Proponer una metodología de enseñanza para la academia.

Descripción del Contenido

Introducción: En la introducción se establecerá el propósito de la investigación, los antecedentes, problemática y otras cuestiones de ámbito general del trabajo. Para el caso de esta investigación se presentará una herramienta computacional de cálculo estructural, a través de formulaciones no convencionales (teorías no locales), el cual es indispensable para formulaciones con nuevos materiales, y tener un modelo más cercano a la realidad de aquellos materiales comúnmente utilizados. Asimismo, se empleará una teoría a través del First Shear Deformation Theory (FSDT) utilizando 5 parámetros los cuales modelen la deformación de la sección a medida que el elemento viga se deforma. También se definirán los objetivos a cumplir, así como la hipótesis planteada.

Marco teórico: Esta parte de la tesis es fundamental debido a que a través del marco teórico explicaremos cómo y de donde surgen las teorías utilizadas para la formulación a emplear. Los puntos más importantes implican teoría de mecánica del continuo, explicación del método de los elementos finitos, explicar el principio de los trabajos virtuales, explicar los métodos numéricos a utilizar, sobre todo los que implican integración numérica, explicar las teorías de vigas y finalmente las teorías no locales.

Formulación: Una vez establecida las teorías a utilizar, se debe realizar una formulación con dichas teorías. Para ello se utilizará el FSDT con 5 parámetros, el principio de trabajo

virtual y se desarrollará una formulación con teorías locales y no locales. Para realizar la formulación se utilizará el programa maplesoft como procesador matemático.

Programación en matlab: Se mostrará el proceso del programa en Matlab, los diagramas de flujo y algoritmos utilizados. Se explicará el significado de cada variable en el código. Se realizará la formulación planteada en la sección anterior de manera que solo se tengan que introducir datos. Finalmente, se verificará el resultado de un problema con solución exacta (bench mark problem) para demostrar la validez de la herramienta.

Resultados: Se realizarán pruebas distintas a la de la literatura, con diversos casos de estudio y se realizará un análisis local y no local.

Discusión de resultados: Evaluar los resultados obtenidos en la sección anterior, encontrar las variaciones, las similitudes y establecer algún parámetro el cual sea diferenciador.

Conclusiones y Recomendaciones: Síntesis del trabajo

1 MARCO TEÓRICO

En la presente sección, se muestran las diferentes teorías y fundamentos matemáticos sobre los cuales se basa el presente proyecto. En primer lugar hemos considerado la mecánica de medios continuos, base fundamental del análisis estructural que se encarga del estudio del comportamiento de sistemas y/o elementos mediante el planteamiento de modelos matemáticos con asunciones de continuidad en su composición interna. Asimismo, ya que esta investigación se enfoca en el análisis de vigas, es imprescindible considerar las teorías de vigas necesarias que nos permitan concebir una idea lógica acerca de los modos de deformación de las vigas. Por otra parte, presentaremos los conceptos básicos acerca del Método de los Elementos Finitos y de su modo de aplicación al análisis estructural, así como los Principios de Energía y Trabajo, utilizados para desarrollar la formulación variacional y posterior aplicación mediante elementos finitos. Finalmente, desarrollaremos las Teorías de No-Localidad, las cuales proponen una manera diferente sobre el comportamiento de los materiales.

1.1 Teoría del Medio Continuo

1.1.1 Introducción a la Mecánica de Medios Continuos.

El medio continuo es un conjunto de partículas que en su totalidad conforman un sólido, un líquido o un gas, y es estudiado de forma global (o en conjunto), sin tomar en cuenta las discontinuidades microscópicas. Teniendo en cuenta este comportamiento, se asume que no existen dichas discontinuidades en el comportamiento mecánico del conjunto y la representación matemática de su comportamiento, así como las propiedades, son consideradas funciones continuas. El uso de la mecánica del medio continuo radica en definir cómo las diferentes partículas que ocupan el medio ocupan distintas posiciones en el espacio durante el tiempo. (Olivella & Agelet de Saracíbar, 2002)

El análisis cinemático y mecánico de los materiales modelados bajo asunciones de continuidad es denominado *Mecánica de Medios Continuos* (Mase & Mase, 1999). Existen dos temas de especial importancia en los que se divide la mecánica del medio continuo. En primer lugar, está el énfasis en la derivación de las ecuaciones fundamentales, basadas en leyes de la física, válidas para todo medio continuo, como por ejemplo, conservación de masa, principios de energía y trabajo, etc. El segundo tema se centra en el desarrollo de las ecuaciones constitutivas, las cuales representan el

comportamiento de materiales idealizados específicos, como por ejemplo, elasticidad, viscoelasticidad, etc.

De esta manera, en base a las asunciones del medio continuo, se puede expresar matemáticamente las propiedades mecánicas y/o cinemáticas de un determinado cuerpo como funciones continuas, dependientes del tiempo y del espacio.

Algunas de las asunciones típicas para el análisis de medios continuos dependen del comportamiento de los materiales: (1) que estos sean *homogéneos*, es decir, que sus propiedades sean idénticas en cualquiera de sus puntos y (2) que sean *isotrópicos* respecto a sus propiedades mecánicas, las cuales deben ser iguales en todas las direcciones en un punto en específico.

1.1.2 Matemática esencial.

El lenguaje de la mecánica de medios continuos son el álgebra y los tensores (Mase & Mase, 1999). Generalmente, se denomina tensores a aquellas entidades matemáticas que son utilizadas para expresar cantidades físicas de especial interés dentro de la mecánica de medios continuos.

1.1.2.1 Vectores

La descripción analítica de cualquier fenómeno físico trae consigo el descubrimiento de “*cantidades*” que pueden ser clasificadas de acuerdo a la información necesaria para especificarlas detalladamente: escalares y no escalares. Los escalares o *tensores de orden cero* son expresados mediante un único valor numérico, como por ejemplo, densidad y temperatura. Los no escalares no tienen una magnitud específica pero sí tienen dirección, y son denominados *vectores* o *tensores de primer orden*. (Reddy, 2008)

Los vectores no dependen de un sistema coordenado en específico. Sin embargo, son usados para describir distintos escenarios de mecánica de medios continuos, los cuales ocurren en un espacio físico tri-dimensional también denominado *espacio Euclidiano*, cuya geometría depende de un sistema de coordenadas cartesianas. Por ello, es usual definir un vector en función de sus componentes de sus componentes en cada uno de los ejes coordenados del espacio Euclidiano.

Para representar vectores y tensores, introducimos en nuestro espacio físico un sistema de coordenadas de ejes Cartesianos (x_1, x_2, x_3) , identificando mediante dichos ejes sus respectivos vectores unitarios bases $(\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3)$ como se indica en la 1.1.1a.

Figura 1.1.1a. Vectores unitarios en las direcciones coordenadas x_1, x_2 y x_3 . Adaptado de << Continuum Mechanics for Engineers >>, por Mase & Mase, (1999).

Figura 1.1.1b. Vectores unitarios en las direcciones coordenadas x_1, x_2 y x_3 . Adaptado de <<Continuum Mechanics for Engineers>>, por Mase & Mase, (1999).

Debido a la perpendicularidad entre estos vectores bases, forman una base ortogonal; además, debido a que son vectores unitarios, se puede considerar a dicha base también como ortonormal. La ecuación (1) representa la expresión de un vector $\mathbf{v}$ en términos de sus bases.

$$\mathbf{v} = v_1 \hat{e}_1 + v_2 \hat{e}_2 + v_3 \hat{e}_3 = \sum_{i=1}^3 v_i \hat{e}_i \quad (1)$$

Con la finalidad de simplificar la escritura de las ecuaciones de la mecánica de medios continuos, se introduce un mecanismo notacional denominado convención de suma (*summation convention*). Utilizando dicho mecanismo, el vector $\mathbf{v}$ ahora podrá ser expresado de la siguiente forma.

$$\mathbf{v} = v_i \hat{\mathbf{e}}_i \quad (2)$$

El subíndice repetido i de la ecuación (2) puede denominarse como *índice ficticio* (*dummy index*) ya que puede ser reemplazado por cualquier otro símbolo que no se haya utilizado antes en esa expresión. Se puede representar de esta manera:

$$\mathbf{v} = v_i \hat{\mathbf{e}}_i = v_m \hat{\mathbf{e}}_m = v_k \hat{\mathbf{e}}_k \quad (3)$$

En un producto escalar (o producto punto) de dos vectores orto-normales en un sistema base cartesiano, se conviene utilizar el *delta de Kronecker* δ_{ij} para expresar de manera más simple dicho producto punto (Reddy, 2008). Dicho de esta forma, el producto punto se puede expresar de la siguiente manera:

$$\hat{\mathbf{e}}_i \cdot \hat{\mathbf{e}}_j = \delta_{ij} \quad (4)$$

Donde:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j \\ 0, & \text{si } i \neq j \end{cases} \quad (5)$$

La denotación matricial del delta de Kronecker sería equivalente a la matriz identidad $\mathbf{I}$, representada de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{e}}_1 \cdot \hat{\mathbf{e}}_1 & \hat{\mathbf{e}}_1 \cdot \hat{\mathbf{e}}_2 & \hat{\mathbf{e}}_1 \cdot \hat{\mathbf{e}}_3 \\ \hat{\mathbf{e}}_2 \cdot \hat{\mathbf{e}}_1 & \hat{\mathbf{e}}_2 \cdot \hat{\mathbf{e}}_2 & \hat{\mathbf{e}}_2 \cdot \hat{\mathbf{e}}_3 \\ \hat{\mathbf{e}}_3 \cdot \hat{\mathbf{e}}_1 & \hat{\mathbf{e}}_3 \cdot \hat{\mathbf{e}}_2 & \hat{\mathbf{e}}_3 \cdot \hat{\mathbf{e}}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6)$$

Así, su aplicación y sustitución en un producto punto determinado $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ puede ser descrito como:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_i \hat{e}_i \cdot v_j \hat{e}_j = u_i v_j \hat{e}_i \cdot \hat{e}_j = u_i v_j \delta_{ij} = u_i v_i \quad (7)$$

En lo que respecta a la mecánica del medio continuo, la descripción de dicho medio puede ser representada a partir de funciones matemáticas que indican la posición de cada partícula del medio continuo con respecto a un sistema coordenado y a lo largo del tiempo. Usualmente se plantean funciones continuas, asimismo, que sus derivadas sean continuas. (Olivella & Agelet de Saracibar, 2002)

Configuración de actual (Ω): Se denomina configuración del medio continuo a las posiciones que ocupan todas las partículas ocupan en dicho medio en un instante t .

Instante de referencia (Ω_0): es la configuración inicial o de referencia en el instante $t = t_0$ que se toma como punto de partida para la posterior comparación de la posición de las partículas.

$$\mathbf{X} = X_1 \hat{e}_1 + X_2 \hat{e}_2 + X_3 \hat{e}_3 = X_i \hat{e}_i \quad (8)$$

Figura 1.1.2. Representación gráfica del sistema mostrando la configuración de referencia y la configuración actual. Adaptado del libro «Mecánica de medios continuos para ingenieros», por Olivella & Agelet de Saracibar, (2002)

Se tiene un instante o configuración de referencia (Ω_o) con un vector $\underline{X}$ que denota la posición de una partícula P en dicho instante. A las componentes de dicho vector $\underline{X}$ están definidas por $\underline{X} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix}$ y se le denomina coordenadas materiales. Es decir:

Asimismo se tendrá un instante o configuración “actual” (Ω_t), diferente al instante de referencia, en donde la partícula P ubicada con un vector $\underline{X}$ ahora se encuentra en un punto espacial P', cuyo vector de posición está dado por el vector $\underline{x}$. A las componentes de dicho vector $\underline{x}$ están definidas por $\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ y se les denomina coordenadas espaciales.

El movimiento de las partículas se puede representar por la variación de la posición de las mismas con respecto a un eje coordenado, a lo largo del tiempo. Para ello es necesario definir una función para cada partícula el cuál defina sus coordenadas espaciales o el mismo vector $\underline{x}$ y cómo varía en el tiempo.

De esta manera se pueden caracterizar ecuaciones de movimiento que está dado de la siguiente forma:

$$x = \varphi(X, t) = x(X, t) \text{ ó } x_i = \varphi_i(X_1, X_2, X_3, t) \quad i \in \{1, 2, 3\} \quad (9)$$

Para este caso se plantean las coordenadas espaciales en función a las coordenadas de los materiales, a esta forma se le denominan ecuaciones de movimiento en forma canónica. Este caso es utilizado para el análisis estructural, en cambio la inversa se suele utilizar en lo que respecta al análisis en la mecánica de fluidos.

1.1.2.2 Tensores

Las cantidades físicas de especial relevancia en la mecánica de medios continuos requieren, para su representación, entidades matemáticas de mayor orden que los vectores, los cuales se denominan *tensores de segundo orden* o simplemente tensores. (Mase & Mase, 1999). Los tensores más conocidos son: (1) tensor de esfuerzos y (2) tensor de deformaciones. Existen también tensores de tercer y cuarto orden; sin embargo, a pesar de ser comúnmente usados en mecánica de medios continuos, no son tan abundantes como los tensores de segundo orden.

Al igual que los vectores, son independientes de cualquier sistema de coordenadas; no obstante, es necesario expresar sus componentes en función a los ejes de referencia de un sistema coordinado. Los tensores suelen ser un mapeo de características del medio continuo.

1.1.2.2.1. Tensor Gradiente Deformación

Se tiene un cuerpo de medio continuo con una Partícula P y Q en el instante de referencia y una Partícula P' y Q' en un instante t (Ver Imagen 1.1.3). Q se encuentra en un entorno diferencial dX en el instante de referencia y dx en el instante actual.

Figura 1.1.3. Representación gráfica del entorno diferencial entre un punto P y Q en el instante de referencia y sus homólogos en el instante actual. Adaptado del libro «Mecánica de medios continuos para ingenieros», por Olivella & Agelet de Saracíbar, (2002).

Tomando las coordenadas materiales como referencia se define vectorialmente la posición de x en función a X y el tiempo de esta manera:

$$x_i = \varphi(X_i, t) \quad i \in \{1,2,3\} \quad (10)$$

Siendo la ecuación (10) una ecuación de movimiento, se tiene la ecuación fundamental de la deformación definida como (Olivella & Agelet de Saracíbar, 2002):

$$dx_i = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} dX_j \quad i, j \in \{1,2,3\} \quad (11)$$

Tal que:

$$F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} \quad i, j \in \{1, 2, 3\} \quad (12)$$

Siendo el gradiente de la deformación:

$$\begin{cases} F = x \otimes \bar{V} \\ F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} \end{cases} \quad i, j \in \{1, 2, 3\} \quad (13)$$

Expandiendo:

$$[F] = [x \otimes \bar{V}] = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial X_1} & \frac{\partial}{\partial X_2} & \frac{\partial}{\partial X_3} \end{bmatrix} \quad (14)$$

$$[F] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial X_1} & \frac{\partial x_1}{\partial X_2} & \frac{\partial x_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial X_1} & \frac{\partial x_2}{\partial X_2} & \frac{\partial x_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial X_1} & \frac{\partial x_3}{\partial X_2} & \frac{\partial x_3}{\partial X_3} \end{bmatrix} \quad (15)$$

Tal como lo expresa Olivella & Agelet de Saracíbar (2002):

El tensor gradiente de la deformación $F(X, t)$ contiene la información del movimiento relativo, a lo largo del tiempo t , de todas las partículas materiales en el entorno diferencial de una dada, identificada por sus coordenadas materiales X . En efecto, la ecuación (13) proporciona la evolución del vector de posición relativo $d\mathbf{x}$ en función de la correspondiente posición relativa $d\mathbf{X}$ en el instante de referencia. En este sentido, si se conoce el valor de $F(X, t)$ se dispone de la información asociada al concepto general de deformación definida en la sección. (p26).

1.1.3. Principios de esfuerzos

La definición general de esfuerzo es *fuerza por unidad de área*. Sin embargo, se le puede acuñar una definición más ingenieril. Mase & Mase (1999) definen al esfuerzo como la

medida de la intensidad de una fuerza que actúa dentro o sobre la superficie de un cuerpo. En mecánica de medios continuos, los esfuerzos relevantes son aquellos causados por agentes externos.

Asimismo, Mase & Mase (1999) plantean que es fácilmente distinguible dos tipos de fuerzas actuantes. Primero, están las *fuerzas de cuerpo*, que son aquellas que actúan sobre elementos volumétricos y se distribuyen a través de un cuerpo. Este tipo de fuerzas se pueden definir vectorialmente como b_i (fuerza por unidad de masa), o p_i (fuerza por unidad de volumen). En segundo lugar están las *fuerzas superficiales*, que son aquellas que actúan sobre la superficie de un cuerpo; se denotan vectorialmente mediante el símbolo f_i y tiene dimensión de fuerza por unidad de área. Como ejemplo de fuerzas superficiales podemos mencionar aquellas que ocurren en la superficie externa de dos cuerpos que son presionados uno con el otro (contacto), o aquellas fuerzas resultantes de la transmisión de fuerzas a través de una superficie interna.

1.1.3.1. Vector y tensor de esfuerzos y postulado de esfuerzos de Cauchy.

Los esfuerzos en un punto de la superficie de un cuerpo y de un punto dentro de un medio continuo tridimensional se pueden medir mediante entidades matemáticas. El esfuerzo en un punto de la superficie se mide en términos de fuerza por unidad de área y está en función (magnitud y dirección) del vector de fuerzas así como del plano sobre el cual actúa dicha fuerza. Así, el esfuerzo definido en un punto de la superficie es un vector (Reddy, 2010). Por otro lado, el esfuerzo de un punto dentro de un cuerpo se mide en término de nueve cantidades (tres por plano o tres planos mutuamente perpendiculares en el punto). Estas nueve cantidades se pueden entender como componentes de un tensor de segundo orden, denominado tensor de esfuerzos.

Figura 1.1.4. (a) Un cuerpo soportado en varios puntos de la superficie y sujeto a un número de fuerzas, cortado en un punto por planos de diferente orientación. (b) Vector de esfuerzos en un plano normal al eje x y sobre un plano con vector unitario n para un elemento con carga axial. Adaptado de <<Principles of Continuum Mechanics>>, por Reddy, (2010a).

En primer lugar se definirá el esfuerzo tal y como lo conocemos (fuerza por unidad de área). La fuerza superficial actuante sobre un área específica no depende únicamente del área sino de la orientación de la misma (Reddy, 2010). Así, podemos denotar la fuerza $\Delta f(\hat{n})$ actuante sobre un área pequeña Δa en la posición x . El vector de esfuerzos puede ser definido, tal y como se representa en la Figura 1.1.4(a), de la siguiente forma:

$$\mathbf{t}(\hat{n}) = \lim_{\Delta a \rightarrow 0} \frac{\Delta f(\hat{n})}{\Delta a} \quad (16)$$

Se observa que el vector de esfuerzos es una función puntual del vector unitario normal $\hat{n}$, el cual denota la orientación de la superficie inclinada. Asimismo, por Tercera Ley de Newton de acción y reacción, se deduce que $\mathbf{t}(-\hat{n}) = -\mathbf{t}(\hat{n})$. Por otro lado, es importante mencionar que el vector de esfuerzos $\mathbf{t}$ depende de la orientación del plano sobre el cual este actúa, tal y como se muestra en la Figura 1.1.4(b).

Ahora, con el propósito de denotar los componentes de esfuerzo en un punto interior A en un medio continuo, se engloba dicho punto en una caja rectangular cuyos lados son paralelos a los ejes coordenados, como se muestra en la Figura 1.1.5(a). Cabe resaltar que la caja no tiene dimensiones, solo es referencial.

Figura 1.1.5. Elemento tetraédrico con vectores de esfuerzos sobre sus cuatro caras.
Adaptado de <<Principles of Continuum Mechanics>>, por Reddy, (2010a)

Un punto B en el borde del cuerpo es encerrado dentro de un tetraedro (Figura 1.1.5(b)). Para establecer las relaciones entre el vector de esfuerzos externos $\mathbf{t}$ en el punto B y el estado de esfuerzos (dentro del medio continuo) en dicho punto, se configura un tetraedro infinitesimal en coordenadas cartesianas, como se aprecia en la Figura 1.1.5(b). Sea $\mathbf{t}$ el vector de esfuerzos, $-\mathbf{t}_1, -\mathbf{t}_2, -\mathbf{t}_3$ sus componentes en las direcciones $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$ respectivamente y $\Delta S_1, \Delta S_2, \Delta S_3$ las áreas donde cada componente actúa respectivamente. Aplicando la Segunda Ley de Newton para el movimiento de la masa dentro del tetraedro ($\mathbf{F} = m\mathbf{a}$), podemos denotar lo siguiente:

$$\mathbf{t}\Delta S - \mathbf{t}_1\Delta S_1 - \mathbf{t}_2\Delta S_2 - \mathbf{t}_3\Delta S_3 + \rho\Delta v\mathbf{f} = \rho\Delta v\mathbf{a} \quad (17)$$

Donde Δv es el volumen del tetraedro, ρ la densidad, $\mathbf{f}$ la fuerza de cuerpo por unidad de masa y $\mathbf{a}$ la aceleración.

Ahora, es conveniente expresar el vector de esfuerzos de la siguiente manera:

$$\mathbf{t} = \hat{\mathbf{n}} \cdot (\hat{e}_1 t_1 + \hat{e}_2 t_2 + \hat{e}_3 t_3) \quad (18)$$

Los términos entre paréntesis corresponden al *tensor de esfuerzos*, también denominado *tensor de esfuerzos de Cauchy*

$$\boldsymbol{\sigma} = \hat{e}_1 t_1 + \hat{e}_2 t_2 + \hat{e}_3 t_3 \quad (19)$$

Reemplazando en (18) y (19), arribamos a la fórmula de esfuerzos de Cauchy:

$$\mathbf{t}(\hat{\mathbf{n}}) = \hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^T \cdot \hat{\mathbf{n}} \quad (20)$$

Siendo su respectiva notación matricial:

$$\begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix} \quad (21)$$

Asimismo, se puede representar el tensor de esfuerzos de Cauchy de la siguiente manera:

$$\bar{\bar{\boldsymbol{\sigma}}} = \sigma_{ij} \cdot (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j) \quad (22)$$

Y desarrollándose en la Figura 1.1.6:

Figura 1.1.6. Desarrollo del vector de esfuerzos y sus respectivas componentes en coordenadas cartesianas. Adaptado de <<Principles of Continuum Mechanics>>, por Reddy, (2010a)

1.1.3.2. Estado plano de esfuerzos.

Esta situación se da cuando uno – y solo uno – de los esfuerzos principales en un cuerpo es neutro. Identificar el estado plano de esfuerzos es importantes ya que representa la situación física que ocurre en un punto descargado sobre la superficie de un cuerpo sometido a esfuerzos (Mase & Mase, 1999).

Por ejemplo, si los esfuerzos principales no están ordenados y la dirección del esfuerzo principal neutro es seleccionado arbitrariamente como X_3 , tendremos esfuerzos planos paralelos a los planos X_1 y X_2 , y la matriz de esfuerzos queda definida de la siguiente forma:

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (23)$$

Y si fuera con respecto a los ejes principales, la matriz de esfuerzos será la siguiente:

$$[\sigma_{ij}^*] = \begin{bmatrix} \sigma_{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (24)$$

Figura 1.1.7 (a). Estado plano de esfuerzos considerando a X_3 como eje neutro. Adaptado de <<Continuum Mechanics for Engineers>>, por Mase & Mase, (1999).

Figura 1.1.7 (b). Círculo de Mohr del estado plano de esfuerzos con X_3 como eje neutro. Adaptado de <<Continuum Mechanics for Engineers>>, por Mase & Mase, (1999).

Esta situación está representada en la Figura 1.1.7(a), mediante un elemento de bloque de un cuerpo continuo; y en la Figura 1.1.7(b), mediante su respectivo círculo de Mohr. La ecuación del círculo de la Figura 1.1.7(b) es:

$$\left(\sigma_N - \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} \right)^2 + (\sigma_S)^2 = \left(\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2} \right)^2 + (\sigma_{12})^2 \quad (25)$$

De donde se obtiene que el centro del círculo se localiza en $\sigma_N = \frac{1}{2}(\sigma_{11} + \sigma_{22})$, $\sigma_S = 0$ y el esfuerzo cortante máximo es la raíz cuadrada de la expresión del lado derecho de la Ec (25). Asimismo, los puntos A y B del círculo reflejan el estado de esfuerzos por elementos de área, cuyos vectores normales unitarios son $\hat{e}_1$ y $\hat{e}_2$ respectivamente.

1.1.4 Relaciones cinemáticas.

Son aquellas que relacionan deformaciones con desplazamientos. El vector de desplazamientos de cualquier punto de un cuerpo, según J. N. Reddy (2008), se expresa de la siguiente manera.

$$u(X) = u_1 e_1 + u_2 e_2 + u_3 e_3 \rightarrow U = \sum u_i e_i \quad (26)$$

Figura 1.1.8. Forma representativa del desplazamiento de un punto antes y después de la deformación del cuerpo. Adaptado de << Continuum Mechanics for Engineers >>, por Mase & Mase, (1999)

Los cambios geométricos que experimenta un medio continuo pueden ser analizados de diferentes modos (Reddy, 2010). Para explicar ello, se considerará dos partículas de material P y Q separadas a una distancia dX , indicado en la figura (1.1.9).

Figura 1.1.9. Puntos P y Q separados una distancia $d\mathbf{X}$ en la configuración indeformada K_0 adoptan nuevas posiciones $\bar{P}$ y $\bar{Q}$ en la configuración deformada K , separados entre sí por $d\mathbf{x}$. Adaptado de << Continuum Mechanics for Engineers >>, por Mase & Mase, (1999).

Las distancias entre los puntos P y Q y los puntos $\bar{P}$ y $\bar{Q}$ son dados por:

$$(dS)^2 = d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{X} = dX_i dX_i = (dX_1)^2 + (dX_2)^2 + (dX_3)^2 \quad (27)$$

$$(ds)^2 = d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} = dx_i dx_i = (dx_1)^2 + (dx_2)^2 + (dx_3)^2 \quad (28)$$

La variación de las longitudes cuadradas que ocurre a medida que el cuerpo se deforma hasta alcanzar la configuración deformada puede ser expresada de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} (ds)^2 - (dS)^2 &= d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} - d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{X} = d\mathbf{X} \cdot (\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{X} - d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{X} \\ &= 2d\mathbf{X} \cdot \mathbf{E} \cdot d\mathbf{X} \end{aligned} \quad (29)$$

De la cual, finalmente, se arriba a la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \frac{1}{2} (\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} - \mathbf{1}) = \frac{1}{2} [(1 + \nabla_0 u) \cdot (1 + \nabla_0 u)^T - \mathbf{1}] \\ &= \frac{1}{2} [\nabla_0 u + (\nabla_0 u)^T + (\nabla_0 u) \cdot (\nabla_0 u)^T] \end{aligned} \quad (30)$$

$\mathbf{E}$ es un tensor de segundo orden, denominado Tensor de deformaciones de Green-St. Venant o, simplemente, Tensor de deformaciones de Green.

La notación en coordenadas rectangulares cartesianas del tensor de deformaciones Green-Lagrange es:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} + \frac{\partial u_k}{\partial X_i} \frac{\partial u_k}{\partial X_j} \right) \quad (31)$$

Su notación expandida se expresa de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{\partial u_1}{\partial X_1} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial X_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial X_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_3}{\partial X_1} \right)^2 \right] \\ \varepsilon_{22} &= \frac{\partial u_2}{\partial X_2} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial X_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial X_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_3}{\partial X_2} \right)^2 \right] \\ \varepsilon_{33} &= \frac{\partial u_3}{\partial X_3} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial X_3} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial X_3} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_3}{\partial X_3} \right)^2 \right] \\ \varepsilon_{12} = \varepsilon_{21} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial X_2} + \frac{\partial u_2}{\partial X_1} + \frac{\partial u_1}{\partial X_1} \frac{\partial u_1}{\partial X_2} + \frac{\partial u_2}{\partial X_1} \frac{\partial u_2}{\partial X_2} + \frac{\partial u_3}{\partial X_1} \frac{\partial u_3}{\partial X_2} \right) \\ \varepsilon_{13} = \varepsilon_{31} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial X_3} + \frac{\partial u_3}{\partial X_1} + \frac{\partial u_1}{\partial X_1} \frac{\partial u_1}{\partial X_3} + \frac{\partial u_2}{\partial X_1} \frac{\partial u_2}{\partial X_3} + \frac{\partial u_3}{\partial X_1} \frac{\partial u_3}{\partial X_3} \right) \\ \varepsilon_{23} = \varepsilon_{32} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial X_3} + \frac{\partial u_3}{\partial X_2} + \frac{\partial u_1}{\partial X_2} \frac{\partial u_1}{\partial X_3} + \frac{\partial u_2}{\partial X_2} \frac{\partial u_2}{\partial X_3} + \frac{\partial u_3}{\partial X_2} \frac{\partial u_3}{\partial X_3} \right) \end{aligned} \quad (32)$$

1.1.5 Relaciones constitutivas.

Las relaciones constitutivas son aquellas que relacionan los esfuerzos producidos en un determinado punto de un cuerpo compuesto de un determinado material y su respectiva deformación unitaria, basándose en la Ley de Hooke. Para validar estas relaciones, se plantean modelos matemáticos a partir de los cuales se establecen ecuaciones constitutivas que describen el comportamiento del material del cuerpo; y posteriormente se validan dichas ecuaciones con resultados experimentales.

En esencia, las ecuaciones constitutivas son modelos matemáticos que reflejan el comportamiento de los materiales y que luego son validadas mediante resultados experimentales (Reddy, 2010).

Las ecuaciones constitutivas referentes a todo sistema continuo son dadas por la siguiente expresión:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \cdot \varepsilon_{kl} \quad (33)$$

Donde C_{ijkl} es el tensor de elasticidad de cuarto orden (Módulo de Young), expresado en función del Módulo de Poisson. La expresión (33) corresponde a la Ley Generalizada de Hooke, expresada matricialmente de la siguiente manera.

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \end{bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} (1-\nu) & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & (1-\nu) & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & (1-\nu) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (1-2\nu)/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (1-2\nu)/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (1-2\nu)/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{12} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{13} \end{bmatrix} \quad (34)$$

La relación inversa se representa de la siguiente forma.

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{12} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{13} \end{bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \end{bmatrix} \quad (35)$$

La notación matricial del Módulo de Young para materiales homogéneos-isotrópicos se puede expresar de la siguiente manera:

$$C_{ijkl} = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & 0 & 0 & 0 \\ C_{1122} & C_{2222} & C_{2233} & 0 & 0 & 0 \\ C_{1133} & C_{2233} & C_{3333} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{2323} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{1313} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{1212} \end{bmatrix} \quad (36)$$

Donde los componentes C_{ijkl} son los que se muestran a continuación.

$$C_{1111} = C_{2222} = C_{3333} = \frac{E(1 - \nu)}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \quad (37)$$

$$C_{1122} = C_{2233} = C_{1133} = \frac{E\nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \quad (38)$$

$$C_{2323} = C_{1313} = C_{1212} = \frac{E}{2(1 + \nu)} = G \text{ (Módulo de corte)} \quad (39)$$

1.2 Teorías de vigas utilizadas.

C .M Wang; J. N Reddy; K .H Le, (2000) plantean que existe un número de teorías de vigas que permiten representar la cinemática de la deformación. Asimismo, las teorías de vigas pueden ser descritas mediante el siguiente planteamiento cartesiano: (1) la coordenada x en dirección del eje axial de la viga, (2) la coordenada y en dirección de la base (ancho) de la viga y (3) la coordenada z en la dirección del peralte de la viga.

Las teorías de vigas, por lo general, asumen que las cargas aplicadas y la geometría del elemento provocan que los desplazamientos (u , v , w) en dirección de sus respectivas coordenadas (x , y , z) sean expresados únicamente en función de las coordenadas x y z , despreciando el desplazamiento vertical v (en la coordenada y).

Existe un considerable número de teorías sobre el comportamiento de vigas. En el marco teórico de la presente tesis, se desarrollarán las teorías de Euler-Bernoulli (EBT), Timoshenko (TBT) y First Shear Deformation Theory (FSDT). Esta última será de interés especial para este trabajo, desarrollándose con mayor amplitud en secciones posteriores.

Figura 11.2.1. Comparación de la deformación transversal de vigas de acuerdo a las teorías EBT y TBT. Adaptado de Shear Deformable Beams and Plates>>, por C .M Wang; J. N Reddy; K .H Lee, (2000).

1.2.1 Teoría de vigas de Euler-Bernoulli.

Es la clásica teoría de vigas. Khodabakhshi & Reddy (2017) mencionan que esta teoría se desarrolla en base a tres hipótesis: (1) inextensibilidad, (2) rectitud y (3) normalidad de la línea de material transversal al eje de la viga. Esto último quiere decir que el plano normal al eje de la viga permanece rígido antes y después de la deformación. Como consecuencia, se puede asumir que la teoría de Euler-Bernoulli no es capaz de considerar esfuerzos ni deformaciones por corte.

La figura 1.2.2 muestra mejor el comportamiento de una viga bajo el enfoque de la teoría clásica

Figura 1.2.2. Representación de la teoría de Euler-Bernoulli en donde la sección permanece rígida y perpendicular al eje neutro. Adaptado de <<Structural Analysis with applications to aerospace structures (solid mechanics and its applications)>> por Bauchau & Craig, (2009)

La teoría clásica de vigas considera el siguiente campo de desplazamientos:

$$v_1 = u(x_1) - \frac{dw}{dx} \cdot x_3 \quad v_2 = 0 \quad v_3 = w(x_1) \quad (40)$$

donde $x_1 = x$ y $x_3 = z$ son los ejes de la longitud y peralte de la viga respectivamente; el eje y no es tomado en cuenta para deflexiones ya que los efectos en la base de la viga son despreciables; (v_1 , v_2 y v_3) son los desplazamientos totales de un punto específico en las coordenadas (x , y , z) y u y w son las deformaciones longitudinales y transversales de un punto en el eje x , el cual pasa por el centroide de la viga.

Los componentes de deformaciones unitarias diferentes de cero pueden ser expresados de la siguiente manera:

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_{11}^{(0)} + \varepsilon_{11}^{(1)} \cdot x_3 \quad (41)$$

Donde:

$$\varepsilon_{11}^{(0)} = \frac{du}{dx_1}; \quad \varepsilon_{11}^{(1)} = -\frac{d^2w}{dx_1^2} \quad (42)$$

1.2.2 Teoría de vigas de Timoshenko.

Esta teoría difiere con la de Euler-Bernoulli, planteando que el plano normal al eje axial de la viga no permanece perpendicular al dicho eje en la configuración deformada del elemento, lo cual se manifiesta en una pequeña rotación del plano normal al eje. Ello quiere decir que la teoría de Timoshenko si considera deformaciones por corte en la sección transversal de la viga, así como una distribución lineal de esfuerzos de corte en dicha sección (Preethi et al., 2015).

La figura 1.2.3 representa la Teoría de vigas de Timoshenko

Figura 1.2.3. Representación de la teoría de y sus consideraciones cinemáticas. Adaptado de << Dynamics of Fluid-conveying Beams>> Reddy & Wang, (2014)

El campo de desplazamientos correspondiente a esta teoría es el siguiente:

$$v_1 = u(x_1) + \phi_1 \cdot x_3 \quad v_2 = 0 \quad v_3 = w(x_1) \quad (43)$$

Donde ϕ_1 es la denotación de rotación de la sección transversal de la viga. Asimismo, los componentes de deformaciones unitarias diferentes de cero son los siguientes

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_{11}^{(0)} + \varepsilon_{11}^{(1)} \cdot x_3 \quad (44)$$

Donde:

$$\varepsilon_{11}^{(0)} = \frac{du}{dx_1}; \quad \varepsilon_{11}^{(1)} = \frac{d\phi_1}{dx_1} \quad (45)$$

Y también:

$$\varepsilon_{13} = \varepsilon_{13}^{(0)} + \varepsilon_{13}^{(1)} \cdot x_3 \quad (46)$$

Donde:

$$\varepsilon_{13}^{(0)} = \left(\phi_1 + \frac{dw}{dx_1} \right); \quad \varepsilon_{13}^{(1)} = 0 \quad (47)$$

Según Khodabakhshi & Reddy (2017), el campo de desplazamientos de esta teoría asume que las deformaciones y los esfuerzos de corte permanecen constantes en toda la sección transversal del elemento. Ello entra en contradicción con el conocimiento general de que

los esfuerzos cortantes en los extremos superior e inferior de la sección transversal de la viga son nulos y que el esfuerzo máximo se localiza en el centroide de la sección transversal. Por ello, esta teoría requiere el uso de factores de corrección para la compensación del error debido a la asunción considerada. Estos factores de corrección dependen tanto de los parámetros de material y geométricos como de las cargas y condiciones de borde (C .M Wang; J. N Reddy; K .H Lee, 2000). Para una viga homogénea con sección transversal rectangular, el factor de corrección por corte es $K_s = 5/6$. (Khodabakhshi & Reddy, 2017).

1.2.3 First Shear Deformation Theory (FSDT).

1.2.3.1. Teoría refinada sobre placas

En la literatura ingenieril y científica, se han documentado numerosas teorías de placas que incluyen deformación transversal por efectos de corte (Ochoa & Reddy, 1992). Estas teorías plantean que los vectores de esfuerzo (y también los componentes de deformación) se pueden expandir mediante combinaciones lineales entre la coordenada en dirección del espesor del elemento y funciones indeterminadas de posición en el plano de referencia, reduciendo así el complejo análisis 3D del elemento a un análisis bidimensional.

La Teoría de Primer Orden de Deformación por Corte (FSDT por sus siglas en inglés) es la segunda en el orden jerárquico de teorías refinadas sobre placas o “Plate Theories” (C .M Wang; J. N Reddy; K .H Lee, 2000). J.N. Reddy (2003) plantea que para esta teoría, la normal transversal del elemento no permanece perpendicular al eje principal del elemento después de la deformación (VER FIGURA 454) lo cual significa que incluye deformaciones y esfuerzos por corte en su asunción cinemática y que estos son constantes con respecto a la coordenada de su espesor (C .M Wang; J. N Reddy; K .H Lee, 2000).

Figura 1.2.4. Representación de la teoría FSDT en donde la sección sufre deformaciones por corte y deformaciones axiales. Adaptado de << Mechanics of laminated composite plates and shells: theory and analysis>> por J.N. Reddy, (2003).

Asimismo, J. N. Reddy & Arciniega (2004) explican que el desarrollo de esta teoría simula de manera apropiada los efectos por deformación por corte y deformaciones transversales axiales. Estos efectos son de suma importancia para casos en los que se analicen materiales compuestos con un ratio alto en el módulo de Young.

Considerando las asunciones para la aplicación del FSDT, el campo de desplazamientos correspondiente a dicha teoría es el siguiente:

$$\begin{aligned}
 v_1(x, y, z, t) &= u(x, y, t) + x_3 \cdot \phi_1(x, y, t) \\
 v_2(x, y, z, t) &= v(x, y, t) + x_3 \cdot \phi_2(x, y, t) \\
 v_3(x, y, z, t) &= w(x, y, t)
 \end{aligned} \tag{48}$$

Donde u , v , w , ϕ_1 y ϕ_2 son funciones desconocidas a determinar, siendo ϕ_1 y ϕ_2 las denotaciones de la rotación alrededor de los ejes y y x respectivamente.

Similar a la teoría de Timoshenko, en el FSDT es necesario la inclusión de factores de corrección, los cuales dependerán de los parámetros geométricos, cargas impuestas y condiciones de borde de la placa (C .M Wang; J. N Reddy; K .H Lee, 2000). Asimismo, esta teoría asume un estado plano de esfuerzos, y por consiguiente, utiliza la forma reducida de las leyes constitutivas.

1.3 Método de los Elementos Finitos (FEM).

1.3.1. Concepto básico del FEM

J.N. Reddy (1993) plantea que cualquier fenómeno en la naturaleza (químico, aeroespacial, mecánico o biológico) se puede expresar, aplicando leyes fundamentales de la física, mediante ecuaciones algebraicas, integrales o diferenciales que relacionen aquellos parámetros de especial interés.

Los científicos e ingenieros que estudian los fenómenos físicos están involucrados en dos tareas esenciales:

- Formulación o descripción matemática de un proceso físico (planteamiento del fenómeno mediante un modelo matemático)
- Simulación computacional del fenómeno a través de un análisis numérico del modelo matemático.

Para la formulación matemática de un proceso físico se requiere conocimientos profundos sobre física y, sobretodo, uso de herramientas matemáticas certeras. La formulación resulta en un sistema de ecuaciones algebraicas, diferenciales e integrales las cuales gobernarán el fenómeno del sistema que queremos describir, teniendo en cuenta que todas estas ecuaciones contienen las variables y parámetros de nuestro interés. El desarrollo del proceso de un modelo matemático en particular se logra mediante asunciones con referencia a la forma de trabajo de dicho proceso.

Para las simulaciones numéricas, se utiliza un método numérico y una computadora para evaluar nuestro modelo matemático y estimar las características del proceso.

El método de los elementos finitos es considerado el más exacto de los métodos numéricos existentes, aplicándose para la solución de problemas complejos de ingeniería. Este método, tal y como plantea J.N. Reddy (1993) se dota de tres rasgos básicos, los cuales son claves en la superioridad de dicho método en comparación con los otros métodos existentes.

- ✓ *Discretización de elementos finitos:* Se tiene un dominio específico el cual se divide en una serie de subdominios (discretización del dominio), denominados elementos finitos.

El conjunto de todos los elementos finitos se denomina malla de elementos finitos. Todos los elementos están interconectados mediante puntos denominados nodos.

Figura 1.3.1. Discretización del dominio. Adaptado de <<An Introduction to Nonlinear Finite Element Analysis>> por Reddy, (2004)

- ✓ *Ecuaciones de los elementos:* cada subdominio (elemento finito) presenta un conjunto de variables desconocidas, las cuales son aproximadas mediante una combinación lineal de polinomios algebraicos (funciones de aproximación) y parámetros indeterminados, obteniendo ecuaciones algebraicas que relacionan cantidades físicas en los puntos selectivos (nodos) del elemento.
- ✓ *Ensamblaje de las ecuaciones de los elementos y solución:* Las ecuaciones de los elementos se ensamblan usando continuidad y/o equilibrio de cantidades físicas, de manera que se satisfaga las ecuaciones de gobierno del elemento global (dominio).

Mediante la discretización del dominio en elementos, es posible transformar un sistema de ecuaciones diferenciales en un sistema de ecuaciones algebraicas, los cuales, aplicados en un modelo de elementos finitos, relacionan los valores nodales de las variables primarias (desplazamientos) con los valores nodales de las variables secundarias (fuerzas) en un elemento.

1.3.2. Idealización unidimensional de una viga

Consiste en plantear un modelo matemático 1D de una viga considerando los parámetros geométricos y del material de dicho elemento, así como las cargas que actúen sobre la misma. El objetivo es describir el comportamiento global de la viga mediante ecuaciones que incluyan los parámetros necesarios del elemento, y posteriormente obtener sus soluciones, las cuales nos indicarán los puntos críticos de falla del elemento.

Se tiene la siguiente viga cantiléver, sobre la cual actúa una carga axial “P” en su extremo libre.

Figura 1.3.2. Deformación axial de una viga. Adaptado de <<An Introduction to the Finite Element Method>> por J.N. Reddy, (2005).

A continuación se establece las 3 relaciones fundamentales del análisis estructural del elemento: (1) ecuaciones de balance o equilibrio, (2) relaciones cinemáticas y (3) relaciones constitutivas.

Ecuaciones de balance:

$$\sum F_x = 0 : -\frac{d(A\sigma_x)}{dx} = f(x) \quad (49)$$

Relaciones constitutivas (Ley de Hooke):

$$\sigma_x = E \varepsilon_x \quad (50)$$

Relaciones cinemáticas (deformación-desplazamiento):

$$\varepsilon_x = \frac{du}{dx} \quad (51)$$

Considerando este modelamiento como un problema de valores de contorno aplicable a problemas estáticos, arribamos a la ecuación diferencial (52), la cual describe el comportamiento de un determinado punto

$$\frac{d}{dx} \left(EA \frac{du}{dx} \right) + f(x) = 0 \quad ; \quad 0 < x < L \quad (52)$$

y las condiciones de borde (53) y (54).

$$u(x)|_{x=0} = u_0 = 0 \quad (53)$$

$$\left[EA \frac{du}{dx} \right]_{x=L} = Q_0 = P \quad (54)$$

Donde E es el módulo de elasticidad (Módulo de Young), A es el área de la sección transversal de la viga, $u(x)$ es el desplazamiento horizontal de un punto ubicado a una distancia x a lo largo del eje de la barra y Q_0 es la fuerza axial P que actúa sobre el extremo libre de la viga cuando $x=L$.

Con estos datos, se plantea el modelo matemático del elemento, tal y como se muestra a continuación

Figura 1.3.3. Idealización matemática del problema. Adaptado de <<An Introduction to the Finite Element Method>> por J.N. Reddy, (2005).

Así, el problema matemático consiste en resolver la ecuación diferencial (52) en un dominio unidimensional $\Omega = (0; L)$, sujeto a condiciones de borde cuando $x=0$ y $x=L$.

1.3.3. Discretización del dominio.

J.N. Reddy, (2005) propone un ejemplo muy simple para entender el concepto de discretización del Método de los Elementos Finitos. Él hace analogía al perímetro de una circunferencia, cuyo resultado exacto es conocido, y lo aproxima con el uso de polígonos regulares de diferente número de lados. A partir de las figuras, así como matemáticamente, podemos visualizar que a medida que se utiliza más lado, es decir un modelo aproximado con mayor número de elementos más pequeños, el error o la diferencia entre la solución exacta y la aproximada, tiende a cero. Matemáticamente demostramos que:

El perímetro de la circunferencia está en función al número de lados del polígono regular escogido tal que:

$$P_n = \sum_{e=1}^n h_e = n \cdot h_e \quad (55)$$

Siendo

$$h_e = 2R \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right) \quad (56)$$

Entonces el error está dado por:

$$\text{Error} = (2\pi R) - (2Rn \cdot \text{sen}\left(\frac{2\pi}{n}\right)) \quad (57)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (2\pi R) - \left(2Rn \cdot \text{sen}\left(\frac{2\pi}{n}\right)\right) = 0 \quad (58)$$

Figura 1.3.4. Aproximación de la circunferencia. Adaptado de <<An Introduction to the Finite Element Method>> por J.N. Reddy, (2005).

El dominio de la figura 1.3.5 es dividido en una serie de subdominios (elementos lineales), cada uno de ellos denominados *elementos finitos*. Escogemos un subdominio Ω_e localizado entre los puntos A y B cuyas respectivas coordenadas son x_a y x_b (longitud de cada elemento $= h_e = x_a - x_b$). El conjunto de elementos finitos en un dominio dado recibe el nombre de *mallado de elementos finitos*.

Figura 1.3.5. (a) Dominio. (b) Discretización por elementos finitos. Adaptado de <<An Introduction to the Finite Element Method>> por J.N. Reddy, (2005).

De acuerdo a J.N. Reddy (2005) un dominio se divide en una serie de subdominios debido a dos razones. La primera es que los dominios de muchos sistemas están compuestos geométrica o materialmente de diferentes partes, y la solución de estos subdominios requiere aplicar diferentes funciones que sean continuas en las interfaces de dichos subdominios. Por ello, se debe buscar una aproximación de la solución sobre cada subdominio. Y en segundo lugar, la aproximación de la solución sobre cada elemento de la malla es más sencillo que la aproximación del dominio entero.

El número de elementos finitos en los que se divida el dominio dependerá principalmente de la geometría del mismo y de la precisión deseada de la solución. Siempre se debe comenzar estableciendo un número razonable de elementos finitos, dependiendo del criterio del analista estructural, e ir refinando la malla (incrementando el número de elementos finitos) progresivamente, comparando las soluciones de cada refinamiento. Un determinado refinamiento requiere uso de elementos finitos de mayor orden, el cual a su vez depende del grado de polinomio utilizado para obtener la solución sobre cada elemento.

1.3.4 Ecuaciones de los elementos.

La derivación de las ecuaciones de cada elemento finito involucra los siguientes pasos a seguir.

- Desarrollar la formulación débil o de residuos ponderados de la ecuación diferencial.

- Estimar la forma de la solución aproximada sobre un elemento finito en específico.
- Derivar las ecuaciones del elemento finito sustituyendo la solución aproximada en la formulación débil.

Un elemento finito $\Omega_e = (x_a, x_b)$ es separado de la malla. Entonces se busca una solución aproximada a la ecuación diferencial de gobierno de dicho elemento. En general, se puede usar cualquier método que permita la derivación de relaciones algebraicas necesarias entre los valores de las variables dependientes.

1.3.4.1. Formulación débil.

El objetivo principal del método de los elementos finitos es encontrar la solución aproximada de la ecuación (52) aplicada sobre cada elemento finito. Para ello, se utiliza la siguiente expresión polinomial.

$$u_h^e = \sum_{j=0}^n u_j^e \psi_j^e(x) \quad (59)$$

donde u_i^e son los valores de la solución $u(x)$ en los nodos del elemento finito Ω_e y ψ_i^e son las funciones polinómicas de aproximación del elemento. La precisión requerida para el análisis por elementos finitos definirá el grado de los polinomios de aproximación; sin embargo, este concepto se desarrollará con mayor detalle en secciones posteriores.

En esta sección, la formulación débil se desarrolla con el método de residuos ponderados, y tiene como objetivo trasladar la diferenciación (o reducirla) de la ecuación diferencial a la función de peso w . A continuación, se detallan los tres pasos típicos para construir la formulación débil en un sistema mecánico.

Figura 1.3.6. (a) Discretización de elementos finitos de un dominio unidimensional. (b) Elemento finito con las respectivas variables primaria (u) y secundaria (Q) en sus nodos. Adaptado de <<An Introduction to the Finite Element Method>> por J.N. Reddy, (2005).

- a) La ecuación diferencial de gobierno debe ser multiplicada por una función de peso $w(x)$ y se integra en un subdominio específico Ω_e .

Tenemos el residuo:

$$R(x) = -\frac{d}{dx} \left[EA \frac{du}{dx} \right] - q(x) \quad (60)$$

el cual se pondera mediante la siguiente ecuación integral:

$$\int_{x_a}^{x_b} w \left[-\frac{d}{dx} \left(EA \frac{du}{dx} \right) - q(x) \right] dx = 0 \quad (61)$$

Siendo $w(x)$ la función de peso

b) Mediante integración por partes, se traslada la diferenciación de u a w

$$\int_{x_a}^{x_b} \left[EA \frac{dw}{dx} \frac{du}{dx} - w \cdot q(x) \right] dx - \left[w \left(EA \frac{du}{dx} \right) \right] \Big|_{x_a}^{x_b} = 0 \quad (62)$$

Donde se aplicó la fórmula de integración por partes:

$$\int_0^L w dv = (wv) \Big|_0^L - \int_0^L v dw \quad (63)$$

c) Este último paso consiste en identificar las variables primarias y secundarias de la formulación. Las condiciones de borde de la ecuación diferencial son clasificadas como esenciales (geométricas) y naturales (de fuerza). Esta clasificación se realiza luego de examinar el siguiente término:

$$\left[w \left(EA \frac{du}{dx} \right) \right] \Big|_{x_a}^{x_b} \quad (64)$$

el cual corresponde a una variable secundaria, para finalmente obtener:

$$\int_{x_a}^{x_b} \left[EA \frac{dw}{dx} \frac{du}{dx} - w \cdot q(x) \right] dx - w(x_a)Q_1 - w(x_b)Q_2 = 0 \quad (65)$$

El modelo de elemento finito basado en la ecuación (65) se denomina *modelo de elementos finitos de formulación débil de Galerkin*. Esta formulación admite funciones de aproximación de menor orden que aquella de la ecuación (61).

1.3.4.2 Funciones de aproximación.

Se debe recordar que en los métodos variacionales clásicos, las soluciones aproximadas son buscadas y aplicadas sobre un dominio total $\Omega = (0, L)$. De esta forma, la solución aproximada $u(x) \approx U_h^e(x) = \sum_{j=0}^n u_j^e \psi_j^e(x)$ debe satisfacer las condiciones de borde planteadas para el problema (J.N. Reddy, 2005). Ello nos conlleva a considerar ciertas restricciones a la hora de derivar las funciones de aproximación $\psi_j^e(x)$, sobre todo cuando

existe discontinuidad en la geometría, propiedades del material y/o cargas impuestas al modelo. De acuerdo a J.N. Reddy (2005) las condiciones que deben cumplir las funciones de aproximación, con el fin de garantizar que la solución sea convergente cuando el número de elementos se incrementa, son las siguientes:

- 1) Deben ser continuas sobre el elemento y diferenciables, tal y como los requiere la formulación débil.
- 2) Deben ser polinomios completos que incluyan términos de alto y bajo orden
- 3) Deben interpolar las variables primarias en los nodos del elemento finito, de manera que la continuidad de la solución sea impuesta a través de los bordes entre elementos.

La primera condición debe cumplirse por obvias razones: asegura una matriz de coeficientes diferentes de cero. Asimismo, la segunda condición es necesaria para establecer todos los posibles estados de la solución actual (constante, lineal, y así sucesivamente). Finalmente, la tercera condición es indispensable para garantizar la continuidad de las variables primarias en los nodos comunes a los elementos.

Figura 1.3.7. (a) Aproximación lineal. (b) Aproximación cuadrática. Adaptado de <<An Introduction to the Finite Element Method>> por J.N. Reddy, (2005).

La figura (1.3.7) muestra las aproximaciones lineal y cuadrática de la solución por elementos finitos. Para la aproximación lineal se utilizan polinomios de interpolación de Lagrange, basados en las funciones de interpolación de Lagrange y son las siguientes:

$$u_h^e = \sum_{j=1}^2 u_j^e \psi_j^e = u_1^e \psi_1^e + u_2^e \psi_2^e \quad (66)$$

donde

$$\psi_1^e(x) = \frac{x_b - x}{x_b - x_a} ; \quad \psi_2^e(x) = \frac{x - x_a}{x_b - x_a} \quad (67)$$

y:

$$u_1^e = u_h^e(x_a) ; \quad u_2^e = u_h^e(x_b) \quad (68)$$

Figura 1.3.8. (a) Funciones lineales de interpolación. (b) Aproximación lineal de elementos finitos. Adaptado de <<An Introduction to the Finite Element Method>> por J.N. Reddy, (2005).

Asimismo, de la figura (1.3.8) se obtiene que:

$$\sum_{j=1}^2 \psi_j^e(x) = \psi_1^e(x) + \psi_2^e(x) = 1 \quad (69)$$

$$\psi_i^e(x_j^e) = \begin{cases} 0; & \text{si } i \neq j \\ 1; & \text{si } i = j \end{cases} \quad (70)$$

Anteriormente se mencionó que el grado (orden) de la aproximación polinomial se puede incrementar para asegurar una mayor precisión en los resultados. Para una aproximación cuadrática, tendremos que utilizar las funciones cuadráticas de interpolación de Lagrange.

$$u_h^e = \sum_{j=1}^3 u_j^e \psi_j^e = u_1^e \psi_1^e + u_2^e \psi_2^e + u_3^e \psi_3^e \quad (71)$$

Figura 1.3.9. Elemento unidimensional cuadrático de Lagrange y sus funciones de interpolación. (a) Geometría del elemento. (b) Funciones de interpolación. Adaptado de <<An Introduction to the Finite Element Method>> por J.N. Reddy, (2005).

1.3.4.2 Modelo de elementos finitos.

En esta sección, se busca una solución aproximada de la ecuación diferencial para cada elemento finito (subdominio). Se tiene en cuenta que la geometría del subdominio es más simple que la del dominio; por tanto, la geometría del elemento debe permitir la derivación sistemática de las funciones de aproximación. Ya en la sección 1.3.4.1 se dio a conocer la siguiente expresión:

$$u \approx u_h^e = \sum_{j=1}^n u_j^e \psi_j^e(x) \quad (72)$$

Tener en cuenta que, cuando $n < 2$, la formulación débil debe ser modificada de tal manera que incluya variables secundarias distintas de cero al interior del elemento, es decir:

$$\int_{x_a}^{x_b} \left[EA \frac{dw}{dx} \frac{du}{dx} - w \cdot q(x) \right] dx - \sum_{j=1}^n w(x_j^e) Q_j^e = 0 \quad (73)$$

se considera la siguiente expresión:

$$w(x) = \sum_{i=1}^n w_i \psi_i^e(x) \quad (74)$$

siendo los coeficientes w_i arbitrarios. Reemplazando (74) en (73) se obtiene:

$$0 = \int_{x_a}^{x_b} \left[EA \left(\sum_{i=1}^n w_i \frac{d\psi_i^e}{dx} \right) \left(\sum_{j=1}^n u_j^e \frac{d\psi_j^e}{dx} \right) - q(x) \left(\sum_{i=1}^n w_i \psi_i^e \right) \right] dx - \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n w_i \cdot \psi_i^e(x_j^e) \right) Q_j^e \quad (75)$$

y agrupando:

$$0 = \sum_{i=1}^n \left\{ \int_{x_a}^{x_b} \left[EA \frac{d\psi_i^e}{dx} \left(\sum_{j=1}^n u_j^e \frac{d\psi_j^e}{dx} \right) - q(x) \psi_i^e \right] dx - \sum_{j=1}^n \psi_i^e(x_j^e) Q_j^e \right\} w_i \quad (76)$$

se despeja la ecuación “i”:

$$0 = \int_{x_a}^{x_b} \left[EA \frac{d\psi_i^e}{dx} \left(\sum_{j=1}^n u_j^e \frac{d\psi_j^e}{dx} \right) - q(x) \psi_i^e \right] dx - Q_i^e \quad (77)$$

y finalmente:

$$0 = \sum_{j=1}^n \left(\int_{x_a}^{x_b} EA \frac{d\psi_i^e}{dx} \frac{d\psi_j^e}{dx} dx \right) u_j^e - \int_{x_a}^{x_b} q(x) \psi_i^e dx - Q_i^e; \quad i = 1..n \quad (78)$$

$$0 = \sum_{j=1}^n K_{ij}^e u_j^e - f_i^e - Q_i^e \quad (79)$$

$$\text{Donde: } K_{ij}^e = \int_{x_a}^{x_b} EA \frac{d\psi_i^e}{dx} \frac{d\psi_j^e}{dx} dx \quad (80)$$

$$f_i^e = \int_{x_a}^{x_b} q(x) \psi_i^e dx \quad (81)$$

Llegando a la siguiente conclusión:

$$[K]^e \{u\}^e = \{f\}^e + \{Q\}^e \quad (82)$$

1.3.5 Métodos Variacionales de Aproximación.

1.3.5.1 Método de colocación

El método de colocación es aquel método que aproxima al residuo a cero. Para ello se toman diversos números intermedios en el dominio, de tal manera que los números escogidos sean la misma cantidad que incógnitas desconocidas. En la solución aproximada se tiene que

$$(x) \approx U_N = \sum_{j=1}^N c_j \phi_j(x) + \phi_0(x) \quad (83)$$

En donde $\phi_j(x)$ y $\phi_0(x)$ son funciones que serán escogidas y c_j son los parámetros por determinar. Para poder determinar los parámetros c , debemos obtener N expresiones para resolver N parámetros c .

1.3.5.2 Método de mínimos cuadrados (Least-squares)

Otro método, en el que el residuo puede ser cero, es el de mínimos cuadrados. Este método implica minimizar la integral del residuo elevado al cuadrado, de tal manera que se tendría la integral del producto del residuo por su derivada.

$$\text{minimizar: } \int_{\Omega} R^2 d\Omega \quad (84)$$

$$\int \left(\frac{\partial R}{\partial a_i} \right) R d\Omega = 0 \quad (85)$$

1.3.5.3 Método de Galerkin

El método de Galerkin implica utilizar las funciones N (utilizadas para aproximar la solución) como funciones de peso de tal manera que:

$$0 = \int_{\Omega} \Psi_i R d\Omega, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad \Psi_i = \phi_i \quad (86)$$

Petrov-Galerkin implica utilizar otras funciones diferentes a la de la aproximación de la solución como peso de tal manera que:

$$0 = \int_{\Omega} \Psi_i R d\Omega, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad \Psi_i \neq \phi_i \quad (87)$$

1.3.5.4 Polinomios de interpolación de Lagrange

Las funciones de interpolación de Lagrange implican dividir el elemento en espaciamentos equidistantes.

$$\psi_i^e(x) = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{p+1} \frac{(x - x_k)}{(x_i - x_k)}, \quad i = 1, 2, \dots, p+1 \quad (88)$$

El detalle de este método de aproximación ya fue explicado en secciones anteriores.

1.3.5.5 Función de aproximación nodal espectral

Las funciones de aproximación nodal espectral, o también conocidas como polinomios de Legendre, implican espaciar los puntos de interpolación de tal manera que ninguno punto en todo el dominio supere los valores admisibles planteados por causa de la interpolación. De tal manera que está definido por:

$$\psi_i^e(\xi) = \frac{(\xi - 1)(\xi + 1)L'_p(\xi)}{P(P+1)L_p(\xi_i)(\xi - \xi_i)} \quad (89)$$

1.3.6 Integración Numérica

La integración numérica es un método numérico el cual es utilizado para aproximar la solución de una integral al realizar una sumatoria de áreas parciales debajo de la curva de una función. La precisión de esta técnica radica en la discretización de las áreas a sumar y de la complejidad de la función a integrar.

Existen distintas técnicas para realizar una integración numérica, las más conocidas son la regla del trapecio simple y múltiple, regla de Simpson y la cuadratura de Gauss. (Chapra & Canale, 2007)

1.3.6.1 Regla del Trapecio Simple

Implica utilizar un polinomio de primer orden para representar la totalidad de la función a integrar. El área total es aproximada al área formado por el polinomio de primer orden aproximado con los límites de integración (formando un trapecio).

Siendo (a) el límite inicial de integración y (b) el límite final, se tiene que:

$$f_{trap}(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \quad (90)$$

$$I = \int_a^b f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) dx \quad (91)$$

$$I = (b - a) \frac{f(a) + f(b)}{2} \quad (92)$$

1.3.6.2 Regla del Trapecio Múltiple

Implica utilizar la regla del trapecio simple para una porción de la función a integrar, es decir discretizar de tal modo que dividamos el área a integrar en múltiples trapecios

$$I = \int_{x_0}^{x_1} f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) dx + \int_{x_1}^{x_2} f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) dx \dots \dots \quad (93)$$

$$I = (b - a) \frac{f(x_0) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n)}{2n} \quad (94)$$

1.3.6.3 Regla de Simpson

La regla de Simpson implica utilizar un polinomio de un orden mayor para aproximar la solución de la función a integrar. Se tiene la regla de Simpson 1/3 que implica el uso de un polinomio de segundo orden (utilizar 3 puntos de la curva), y se tiene la regla de Simpson 3/8 que implica el uso de un polinomio de tercer orden (utilizar 4 puntos de la curva). La regla de Simpson puede ser utilizado para obtener resultados totales y resultados parciales. Una sumatoria de varios resultados parciales daría una mejor aproximación a la solución.

Simpson 1/3:

$$I = \frac{1}{3} \left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right] \cdot \frac{b-a}{2} \quad (95)$$

Simpson 3/8:

$$I = \frac{3}{8} \left[f(a) + 3f\left(a + \frac{b-a}{3}\right) + 3f\left(a + 2 \cdot \frac{b-a}{3}\right) + f(b) \right] \cdot \frac{b-a}{3} \quad (96)$$

1.3.6.4 Cuadratura de Gauss 2 puntos

La cuadratura de Gauss implica realizar un procedimiento similar a la de la regla del trapecio, solo que busca puntos intermedios, de tal manera que se compense los espacios que sobrepasan la curva, con los espacios restantes.

$$I = C_0 f(x_0) + C_1 f(x_1) \quad (97)$$

Para encontrar los valores de C_0 , C_1 , x_0 y x_1 , se resuelve el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} C_0 f(x_0) + C_1 f(x_1) = \int_{-1}^1 1 dx = 2 \\ C_0 f(x_0) + C_1 f(x_1) = \int_{-1}^1 x dx = 0 \\ C_0 f(x_0) + C_1 f(x_1) = \int_{-1}^1 x^2 dx = 2/3 \\ C_0 f(x_0) + C_1 f(x_1) = \int_{-1}^1 x^3 dx = 0 \end{cases} \quad (98)$$

Y se obtiene que

$$C_0 = 1, x_0 = -\frac{1}{\sqrt{3}}, C_1 = 1, x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad (99)$$

1.3.6.4.1 Ejemplo obtenido del libro de Chapra y Canale

Se tiene la función

$$f(x) = 0.2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5 \quad (100)$$

Y se desea integrar entre los límites $x=0$ y $x=0.8$

Primero se realiza un cambio de variable para que los límites sean -1 y 1.

$$x = \frac{(b + a) + (b - a)x_d}{2} \quad (101)$$

$$dx = \frac{b - a}{2} dx_d \quad (102)$$

$$x = 0.4 + 0.4x_d \quad (103)$$

$$dx = 0.4dx_d \quad (104)$$

Entonces:

$$\int_0^{0.8} 0.2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5 dx \quad (105)$$

Reemplazando x y dx :

$$\int_{-1}^1 [0.2 + 25(0.4 + 0.4x_d) - 200(0.4 + 0.4x_d)^2 + 675(0.4 + 0.4x_d)^3 - 900(0.4 + 0.4x_d)^4 + 400(0.4 + 0.4x_d)^5] 0.4 dx \quad (106)$$

$$I = C_0 f(x_0) + C_1 f(x_1) \quad (107)$$

$$I = 0.516741 + 1.305837 = 1.822578 \quad (108)$$

1.3.6.4.2 Cuadratura de Gauss de múltiples puntos

$$I = C_0 f(x_0) + C_1 f(x_1) + \dots + C_{n-1} f(x_{n-1}) \quad (109)$$

La siguiente tabla muestra los valores de los factores según el número de puntos a utilizar:

Puntos	Factor de Ponderación	Argumentos de la función
2	c0 = 1.0000000 c1 = 1.0000000	x0 = -0.577350269 x1 = 0.577350269
3	c0 = 0.5555556 c1 = 0.8888889 c2 = 0.5555556	x0 = -0.774596669 x1 = 0.0 x2 = 0.774596669
4	c0 = 0.3478548 c1 = 0.6521452 c2 = 0.6521452 c3 = 0.3478548	x0 = -0.861136312 x1 = -0.339981044 x2 = 0.339981044 x3 = 0.861136312
5	c0 = 0.2369269 c1 = 0.4786287 c2 = 0.5688889 c3 = 0.4786287 c4 = 0.2369269	x0 = -0.906179846 x1 = -0.538469310 x2 = 0.0 x3 = 0.538469310 x4 = 0.906179846
6	c0 = 0.1713245 c1 = 0.3607616 c2 = 0.4679139 c3 = 0.4679139 c4 = 0.3607616 C5 = 0.1713245	x0 = -0.932469514 x1 = -0.661209386 x2 = -0.238619186 x3 = 0.238619186 x4 = 0.661209386 x5 = 0.932469514

Tabla1. Valores de los parámetros a utilizar para la cuadratura de Gauss dependiendo el número de puntos. Adaptado de <<Métodos numéricos para ingenieros>> por Chapra & Canale, (2007)

1.4. Principios de energía y trabajo

Una partícula de un material se mueve desde un punto A hasta otro punto B , siendo su desplazamiento en el espacio influenciado por una fuerza F , la cual depende del tiempo (Reddy, 2002). Un determinado vector de posición r mide el recorrido de la partícula desde un lugar fijo en el origen de coordenadas. El trabajo que realiza la fuerza F sobre la partícula provocándole un desplazamiento $dr=du$ en un intervalo de tiempo dt se define de la siguiente manera (Figura 1.1.1.3A)

$$dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{u} = F_1 du_1 + F_2 du_2 + F_3 du_3 \quad (110)$$

Figura 1.4.1. Movimiento de una partícula bajo la acción de una fuerza.. Adaptado de <<Energy Principles and Variational Methods in Applied Mechanics>> por Reddy, 2002.

Entonces se puede afirmar que el trabajo realizado resulta del producto del desplazamiento y la fuerza en dirección del desplazamiento. Así, el trabajo total de la fuerza F al desplazar la partícula desde el punto A hasta B es dado por la ecuación (111).

$$W = \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{u} \quad (111)$$

El trabajo es una magnitud escalar, positiva cuando la fuerza y desplazamiento están en la misma dirección, y negativa cuando ambos parámetros están en direcciones opuestas. Asimismo, es preciso recalcar que el trabajo no depende del trayecto de la partícula, sino de los puntos extremos A y B :

$$W = W_B - W_A \quad (112)$$

La energía es la capacidad para realizar el trabajo, es decir, mide la capacidad de todas las fuerzas que son importantes para realizar un determinado trabajo. Este trabajo que se realiza sobre un cuerpo implica un cambio en su energía, estableciéndose de esa manera que dicho trabajo equivale al incremento de la energía cinética.

Ambos conceptos, energía y trabajo, pueden ser aplicados al análisis estructural, de manera que se considere la energía (o trabajo) interna y externa de deformación de un determinado elemento para posteriormente.

1.4.1. Principio de Energía Potencial Total Estacionaria (PEPE)

Aplicable únicamente a *sistemas conservativos*, es decir, aquellos sistemas mecánicos que conservan su energía. Considera que todo sistema conservativo posee una energía potencial Π , equivalente a la suma de la energía interna de deformación U y al potencial de fuerzas externas V .

$$\Pi = U + V \quad (113)$$

El enunciado postulado por este principio es el siguiente:

“De todas las configuraciones admisibles de un sistema conservativo, aquella que satisface la ecuación de equilibrio hace mínima la Energía Potencial Total respecto de pequeñas variaciones de los desplazamientos admisibles. Y dado que es mínimo, es estable.”(Arciniega, 2005).

Entonces, se puede afirmar lo siguiente:

$$\delta\Pi = \delta U + \delta V = 0 \quad (114)$$

1.4.2. Principio de los Trabajos (Desplazamientos) Virtuales (PTV)

Se puede aplicar a todo sistema mecánico, sea o no conservativo. Desde el punto de vista del material y bajo este principio, es posible analizar estructuras cuyo comportamiento no esté en el rango elástico. El enunciado es el siguiente:

“Un cuerpo continuo está en equilibrio si y solo si el trabajo virtual de todas las fuerzas, internas y externas, actuando sobre el cuerpo es cero ante un desplazamiento virtual.”
(Arciniega, 2005).

Mediante este postulado, se puede deducir lo siguiente:

$$\delta W_i - \delta W_e = 0 \quad (115)$$

Es posible comparar esta ecuación con la planteada por el PEPE, llegando a la siguiente conclusión

$$\delta U = \delta W_i \quad (116)$$

$$\delta V = -\delta W_e \quad (117)$$

Se considera un cuerpo con propiedades de medios continuos con un determinado Volumen V , sometido a fuerzas de cuerpo $\mathbf{b}$ (usualmente peso propio) y a fuerzas superficiales. Asimismo, se tiene un espacio funcional de desplazamientos admisibles (es decir que cumplen con las condiciones de borde).

A partir de la ecuación de Cauchy, se obtiene que:

$$\nabla \cdot \sigma(u) - \rho(b - a(u)) = 0 \quad (118)$$

Entonces asumiendo el comportamiento de los desplazamientos virtuales se obtiene que:

$$\delta U = \delta W_i = \int_V \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV \quad (119)$$

$$\delta V = \delta W_e = \int_V b \delta u_{ij} - a \delta u_{ij} dV \quad (120)$$

1.4.3. Desarrollo de la formulación débil.

La formulación débil implica la aproximación de una ecuación diferencial mediante la formulación de residuos ponderados. Para ello se tiene que definir una ecuación

diferencial de residuos, el cual posteriormente se analiza de forma integral. Luego se evalúa dicha expresión con el producto con un peso y se integra sobre un elemento delimitado o elemento Finito.

Para ejemplo explicativo, se analizará la viga cantiléver de la figura (1.3.2) considerando únicamente efectos axiales. El análisis será realizado en base a los dos principios expuestos en la anterior sección:

Principio de Energía Potencial estacionaria

Energía interna de deformación:

$$U = \int_V \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dV \quad (121)$$

$$\sigma_{ij} \varepsilon_{ij} = E \varepsilon_{ij}^2 = E \left(\frac{du_1}{dx_1} \right)^2 \quad (122)$$

$$\delta U = \int_0^L EA \left(\frac{du_1}{dx_1} \right) \left(\frac{d\delta u_1}{dx_1} \right) dx \quad (123)$$

Trabajo de las fuerzas externas:

$$V = - \int_0^L f(x) u_1 dx - P u_1|_{x=L} \quad (124)$$

Por lo tanto, la energía potencial será:

$$\Pi[u_1(x_1)] = \int_0^L \left\{ EA \left(\frac{du_1}{dx_1} \right)^2 - f(x) u_1 \right\} dx - P u_1|_{x=L} \quad (125)$$

Y la formulación débil será la siguiente:

$$\delta \Pi = \int_0^L \left\{ \frac{1}{2} EA \left(\frac{du_1}{dx_1} \right) \left(\frac{d\delta u_1}{dx_1} \right) - f(x) \delta u_1 \right\} dx - P \delta u_1|_{x=L} = 0 \quad (126)$$

Nota: la ecuación (126) es el equivalente variacional del problema de valores de contorno de la ecuación (65).

Principio de los Trabajos Virtuales:

Trabajo virtual interno:

$$\delta W_i = \int_V \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV \quad (127)$$

$$\sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} = E \varepsilon_{11} \delta \varepsilon_{11} = E \left(\frac{du_1}{dx_1} \right) \left(\frac{d\delta u_1}{dx_1} \right) \quad (128)$$

$$\delta W_i = \int_0^L EA \left(\frac{du_1}{dx_1} \right) \left(\frac{d\delta u_1}{dx_1} \right) dx \quad (129)$$

Trabajo virtual externo:

$$\delta W_e = \int_0^L f(x) \delta u_1 dx + P \delta u_1|_{x=L} \quad (130)$$

Entonces la formulación variacional será

$$\int_0^L \left\{ \frac{1}{2} EA \left(\frac{du_1}{dx_1} \right) \left(\frac{d\delta u_1}{dx_1} \right) - f(x) \delta u_1 \right\} dx - P \delta u_1|_{x=L} = 0 \quad (131)$$

Para el presente proyecto de tesis, la formulación débil de nuestra propuesta se desarrollará en base al Principio de los Trabajos Virtuales.

Funciones de aproximación

Para los métodos variacionales clásicos se tienen que cumplir ciertas características para asegurar la convergencia del resultado, se debe cumplir que las ecuaciones son continuas y sus derivadas también. Deben ser polinomios completos que tengan términos de alto y bajo orden. Las variables primarias en los bordes deben cumplir para asegurar la continuidad del elemento.

1.5 Teorías de No-Localidad.

1.5.1. Conceptos básicos

La mecánica de medios continuos ignora la influencia del campo de deformaciones de los otros puntos distantes con respecto a un punto específico de referencia, ya que considera que todos los puntos de un material son continuos y que sus respectivos comportamientos son independientes unos de otros. Este enunciado es reafirmado por Jirásek, (2004), quien manifiesta que un cuerpo se puede descomponer en una serie de micro-estructuras idealizadas, cada una de las cuales presentando un comportamiento independiente de las demás. La Teoría de No-Localidad de medios continuos, o Teoría Elástica No-Local sí incorpora los efectos que ocurren en los puntos distantes, conocidos como efectos de no-localidad (Karličić et al., 2015).

Eringen (2003) plantea, de un modo general, que las teorías de no-localidad asumen que el comportamiento de un determinado punto “A” de un cuerpo está influenciado por el comportamiento de los otros puntos del cuerpo. Dicho de otro modo, el campo de esfuerzos en el punto de referencia “A” dentro de un medio continuo (dominio) depende no solo de las deformaciones en dicho punto, sino de las deformaciones de los demás puntos del dominio, en especial de aquellos puntos alrededor del punto “A” que se consideran influyen en mayor porcentaje, formando una vecindad alrededor de dicho punto. Cuando los efectos de las deformaciones de los demás puntos no son tomados en cuenta, se está trabajando con la Teoría Clásica de Elasticidad (enfoque local sobre el comportamiento del material). Según Eringen (2003), la teoría no-local generaliza la teoría clásica en dos aspectos: (1) La ley de balance de energía es validada para el dominio entero, es decir, para todo el medio continuo o cuerpo en cuestión; y (2) el estado del cuerpo en un punto del material es descrito por funcionales de respuesta. Esto último quiere decir que se necesita un alto grado de conocimiento acerca de las variables independientes de todos los puntos del cuerpo para la descripción del estado del cuerpo en cada punto.

Los materiales reales no se parecen a mallas perfectas ni presentan pocas imperfecciones (por ejemplo, dislocaciones, átomos extraños, etc.) que permiten a un físico describir el estado del cuerpo de manera mecánica. De la misma manera, los materiales amorfos y de ingeniería no se prestan a tales descripciones ideales. Las teorías no locales permiten describir muy bien las propiedades del material, resolviendo exitosamente problemas

complejos como dispersión de ondas, dislocaciones, fracturas mecánicas, etc (Karličić et al., 2015). De hecho, esta descripción es fiel en escalas microscópicas hasta el tamaño del enmallado utilizado.

1.5.2 Formulación matemática.

Tanto para la teoría clásica de elasticidad como para aquella con efectos de no-localidad, se debe considerar que el material presenta un comportamiento elástico, lineal e isotrópico (Karličić et al., 2015). Así, el tensor de esfuerzos no-locales σ_{ij}^{nl} en un determinado punto x está expresado por la siguiente formulación integral:

$$\sigma_{ij}^{nl} = \int_V K(|x' - x|, \emptyset) \sigma_{ij}(x') dV(x') \quad (132)$$

La función de Kernel $K(|x' - x|, \emptyset)$, también conocida como módulo de no-localidad (Karličić et al., 2015), actúa como una función de atenuación que incorpora efectos de no-localidad en las ecuaciones constitutivas en un punto de referencia x producido por una deformación unitaria local en el origen x' . El término $|x' - x|$ representa la distancia en la forma Euclidiana y $\emptyset$ es una constante del material dependiente de las longitudes características internas y externas, como el espaciado entre celosía o enmallado (lattice spacing) y longitud de fractura respectivamente (Karličić et al., 2015). Además, $\sigma_{ij}(x)$ es el tensor de esfuerzos clásico, cuya denotación por la Ley de Hooke es la siguiente:

$$\sigma_{ij}(x) = C_{ijkl} \cdot \varepsilon_{kl} \quad (133)$$

donde C_{ijkl} es el tensor de elasticidad de cuarto orden. Cabe resaltar que el módulo no-local logra su valor máximo cuando $x'=x$ y su dimensión es (longitud)⁻³ (Karličić et al., 2015). El parámetro $\emptyset$ basado en las teorías de no-localidad se expresa de la siguiente forma:

$$\emptyset = \frac{e_0 \cdot a}{l} \quad (134)$$

donde e_0 es la constante apropiada para cada material, y a y l son las longitudes características internas y externas respectivamente.

Las ecuaciones constitutivas (132) y (133), en conjunto, definen el comportamiento no-local del material en un medio continuo. Sin embargo, la ecuación (132) denota una ecuación diferencial integro-parcial complicada de resolver en el rango elástico (Karličić et al., 2015). Sin embargo, (Reddy, 2010) basándose en investigaciones de Cemal A. Eringen, plantea que es posible representar la formulación integral de la ecuación (132) en su equivalente forma diferencial:

$$(1 - \emptyset^2 l^2 \nabla^2) \cdot \sigma_{ij}^{nl} = \sigma_{ij} = C_{ijkl} \cdot \varepsilon_{kl} \quad (135)$$

donde ∇^2 es el operador Laplaciano. De otro lado, la ecuación (135) se puede simplificar, obteniendo la siguiente expresión:

$$L_0 \cdot \sigma_{ij}^{nl} = C_{ijkl} \cdot \varepsilon_{kl} ; L_0 = 1 - \mu \nabla^2 ; \mu = (e_0 a)^2 \quad (136)$$

Adicionalmente, se puede denotar al operador Laplaciano como una segunda derivada, quedando de la siguiente manera:

$$L_0 = 1 - \mu \frac{d^2}{dx^2} \quad (137)$$

2 METODOLOGÍA

En esta sección se mostrará los casos de estudio a desarrollar. Para ello es importante primero realizar una verificación. La verificación en sistemas estructurales implica la comparación de un modelo matemático con otro, a través de la comparación de los resultados, parciales o totales. La verificación es una manera numérica de comprobar un modelo matemático nuevo, con respecto a otro que ya ha sido verificado o validado. Asimismo, se puede considerar que un sistema estructural está verificado cuando este cumple con una variación mínima de algún problema cuya solución ya esté definida sin lugar a duda. Es decir, por ejemplo, al desarrollarse una herramienta computacional que utilice el Método de los Elementos Finitos para vigas, para verificar esta herramienta se compara sus resultados a través de métodos numéricos con algún problema típico o “Benchmark Problem” cuyo resultado sea conocido y posteriormente se evalúa cuánto es el error.

Sin embargo, una validación estructural, implica una prueba o experimento real, el cual sustente el modelo numérico. La comparación de una prueba real, el cual utilice sensores para obtener mediciones, con un modelo matemático es una validación. En cambio, las validaciones pueden tener un margen de error considerable, debido a que los modelos matemáticos suelen tener un número finito de variables, así como, suposiciones, los cuales no se cumplen a un 100% en la realidad. Este puede ser el caso de una suposición Lineal Elástica e Isotrópica del material, el cual no es cierta en la realidad. Para el caso anteriormente expuesto, el de un modelo a través del método de los Elementos Finitos de una viga, una validación implicaría utilizar un equipo que aplique cargas a una viga y poder medir los desplazamientos producidos. La comparación entre el experimento y el modelo es una validación. Sin embargo, en la presente investigación sólo se realizará una verificación.

2.1. Método

El método a utilizar para la resolución de vigas con teorías no locales es el método de los Elementos Finitos. Como se explicó anteriormente en el marco teórico (Ver 1.3), el método implica la discretización de un problema continuo en un número finito de puntos a resolver, de tal manera que la respuesta se aproxime a la realidad. Este método tiene dos tipos de discretización según la literatura, al primero se le denomina “H” en referencia al tamaño de los elementos a analizar y el segundo se le denomina “P” en referencia a las

funciones de interpolación utilizadas. En esta investigación se realizará una discretización “HP” que constará tanto en un enmallado más fino como en el uso de funciones de interpolación de diferente orden.

2.2. Nivel de investigación

La presente investigación tiene un nivel de investigación descriptivo. Este nivel de investigación se basa en la caracterización de un hecho, fenómeno o comportamiento, siendo el caso de estudio el comportamiento de vigas bajo un enfoque No Local. Para ello primero se investigó las características del tema, realizando una hipótesis y una fuente de recolección de datos.

2.3. Diseño de investigación

El diseño de investigación es Documental, es decir se basa en la recolección de información de la Literatura. Como principales autores se tiene a J.N. Reddy y a A.Cemal Eringen, siendo el primero uno de los investigadores referentes en la formulación de vigas, placas y cáscaras, con un enfoque Lineal y No Lineal, así como, Local y No Local. Mientras que Eringen fue uno de los precursores con las formulaciones No Locales.

Por ejemplo, Reddy (2010b), realizó una formulación No Local No Lineal para vigas Euler-Bernoulli, Timoshenko y Placas. Siendo esta investigación un referente importante para entender la utilización de teorías No Locales en teorías clásicas de vigas.

La descripción del comportamiento No Local de vigas tiene la siguiente forma:

1. Se describió un campo de desplazamientos
2. Se empleó un tensor de deformación
3. Se hizo un ordenamiento de términos
4. Se utilizó el principio de trabajos virtuales
5. Se definieron las ecuaciones constitutivas (No Locales)
6. Se utilizaron Ecuaciones de balance
7. Se obtuvieron Esfuerzos Resultantes

8. Se planteó una solución a través del Método de los Elementos Finitos

2.4. Técnicas de Procesamiento y Análisis de datos

Para el procesamiento, el post-procesamiento y el análisis de datos se utilizarán diagramas que representen las deformaciones calculadas por la herramienta de cálculo en el software MATLAB. Se utilizarán gráficos y se calcularán las fuerzas internas (como post-procesamiento) de los elementos a estudiar. Se realizarán cuadros comparativos de resultados numéricos y se hallará la variación según los casos de estudio.

3 METODOLOGÍA DE CÁLCULO

La presente sección tiene por finalidad dar a conocer cómo se llegó a la formulación de elementos finitos a partir de las teorías propuestas en el Marco Teórico.

3.1. Formulación débil general bajo enfoque local

Se aplicará el Principio de los Trabajos Virtuales para el desarrollo de la *formulación variacional* o *formulación débil*.

$$\delta W_i - \delta W_e = 0 \quad (138)$$

Sabiendo que la variación del trabajo interno es:

$$\delta W_i = \int_V \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dv \quad (139)$$

Y la variación del trabajo externo es:

$$\delta W_e = \int_{x_1} (F_1 \cdot \delta u + F_3 \cdot \delta w) dx_1 \quad (140)$$

Para la presente tesis, el tensor de deformaciones de Green Lagrange adoptará una aproximación lineal, tomando la siguiente forma.

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^{(0)} + \varepsilon_{ij}^{(1)} \cdot x_3 \quad (141)$$

Por tanto, la variación de dicha aproximación será de la forma

$$\delta\varepsilon_{ij} = \delta\varepsilon_{ij}^{(0)} + \delta\varepsilon_{ij}^{(1)} \cdot x_3 \quad (142)$$

La ecuación (141) adopta su forma simplificada mediante la siguiente sumatoria:

$$\delta\varepsilon_{ij} = \sum_{k=0}^n \delta\varepsilon_{ij}^{(k)} x_3^k \quad (143)$$

Asimismo, dado que se desprecia los efectos en la dirección de la base del elemento, y teniendo en cuenta que la deformación total del mismo se da únicamente en función de los ejes x_1 y x_3 , la ecuación (139) toma la siguiente forma.

$$\delta W_i = b \int_{x_1} \int_{x_3} \sigma_{ij} \delta\varepsilon_{ij} dx_3 dx_1 \quad (144)$$

Reemplazando (143) en (144) se obtiene

$$\delta W_i = b \int_{x_1} \int_{x_3} \sigma_{ij} \left(\sum_{k=0}^n \delta\varepsilon_{ij}^{(k)} x_3^k \right) dx_3 dx_1 \quad (145)$$

El operador que representa la sumatoria de las variaciones del tensor de deformaciones se puede trasladar de la segunda integral (X_3) a la primera (X_1), obteniéndose lo siguiente.

$$\delta W_i = b \int_{x_1} \left(\sum_{k=0}^n \delta\varepsilon_{ij}^{(k)} x_3^k \right) \int_{x_3} \sigma_{ij} \cdot x_3^k dx_3 dx_1 \quad (146)$$

La expresión resaltada de la ecuación (146) representa la denotación de los esfuerzos resultantes, los cuales representan, de forma simplificada, los estados de esfuerzos en elementos estructurales como placas, cáscaras y, en nuestro caso, vigas. De esa manera, los esfuerzos resultantes, para el modelo planteado en el presente trabajo, se pueden representar, de forma general, mediante la siguiente expresión:

$$N_{ij}^{(k)} = \int_{x_3} \sigma_{ij} \cdot x_3^k dx_3 \quad ; \quad k = 0, 1 \quad (147)$$

Donde:

$$N_{ij}^{(0)} = N_{ij} = \int_{x_3} \sigma_{ij} \cdot dx_3 \quad (148)$$

$$N_{ij}^{(1)} = M_{ij} = \int_{x_3} \sigma_{ij} \cdot x_3 dx_3 \quad (149)$$

3.1.1 Desarrollo matemático de los esfuerzos resultantes.

Por Ley generalizada de Hooke se sabe que:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (150)$$

Introduciendo (150) en (147) se obtiene:

$$N_{ij}^{(k)} = \int_{x_3} (C_{ijkl} \varepsilon_{kl}) \cdot x_3^k dx_3 = \int_{x_3} C_{ijkl} \left(\sum_{s=0}^n \varepsilon_{kl}^{(s)} x_3^s \right) \cdot x_3^k dx_3 \quad (151)$$

Extrayendo el operador de sumatoria del tensor de deformaciones, se obtiene lo siguiente

$$N_{ij}^{(k)} = \left(\sum_{s=0}^n \varepsilon_{kl}^{(s)} \right) \int_{x_3} C_{ijkl} \cdot x_3^{k+s} dx_3 \quad (152)$$

Se sabe que el tensor de elasticidad C_{ijkl} es constante. Por tanto, la expresión integral en (152) se puede denotar mediante una nueva representación.

$$C_{ijkl}^{(k+s)} = C_{ijkl} \cdot \int_{x_3} x_3^{k+s} dx_3 \quad ; \quad s = 0, 1 \quad (153)$$

Analizando la expresión integral en (153) y teniendo en cuenta que X_3 va desde $-h/2$ hasta $h/2$ (peralte de la viga), se obtiene lo siguiente.

$$k + s = 0 ; \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} x_3^0 dx_3 = x_3 \Big|_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} = h \quad (154)$$

$$k + s = 1 ; \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} x_3 dx_3 = \frac{x_3^2}{2} \Big|_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} = 0 \quad (155)$$

$$k + s = 2 ; \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} x_3^2 dx_3 = \frac{x_3^3}{3} \Big|_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} = \frac{h^3}{12} \quad (156)$$

Se puede que, cuando el valor de $k + s$ es impar, la integral resulta nula. De otro lado, cuando dicho valor es cero o par, la integral resulta h y $\frac{h^3}{12}$ respectivamente, valores que al ser multiplicados por b , el resultado es A (área) e I (inercia) respectivamente. Entonces, el tensor de elasticidad C_{ijkl} se puede denotar mediante las siguientes expresiones:

$$C_{ijkl}^{(0)} = C_{ijkl} \cdot A \quad (157)$$

$$C_{ijkl}^{(2)} = C_{ijkl} \cdot I \quad (158)$$

La nueva denotación de los esfuerzos resultantes queda de la siguiente forma:

$$N_{ij}^{(k)} = \sum_{s=0}^n C_{ijkl}^{(k+s)} \varepsilon_{kl}^{(s)} \quad (159)$$

Donde:

$$N_{ij}^{(0)} = N_{ij} = \sum_{k=0} C_{ijkl}^{(0)} \varepsilon_{kl}^{(0)} \quad (160)$$

$$N_{ij}^{(1)} = M_{ij} = \sum_{k=1} C_{ijkl}^{(2)} \epsilon_{kl}^{(1)} \quad (161)$$

3.1.2 Obtención general de los esfuerzos resultantes

Ampliando la expresión (146) se tiene que:

$$\begin{aligned} \delta W_i = \int_{x_1} \int_{x_3} [\sigma_{11} \cdot \delta \epsilon_{11} + \sigma_{22} \cdot \delta \epsilon_{22} + \sigma_{33} \cdot \delta \epsilon_{33} + 2 \cdot \sigma_{12} \cdot \delta \epsilon_{12} + 2 \cdot \sigma_{13} \cdot \delta \epsilon_{13} \\ + 2 \cdot \sigma_{23} \cdot \delta \epsilon_{23}] dx_3 dx_1 \end{aligned} \quad (162)$$

Los efectos de comportamiento de las vigas, por tratarse de elementos lineales, predominan en su eje neutro (Eje X) añadiendo los efectos de corte que ocurren en la sección transversal (Eje Z), despreciando el comportamiento en la dirección de la base (Eje Y) por ser considerado constante. De esa manera, la ecuación (162) se simplifica, adoptando la siguiente forma.

$$\delta W_i = \int_{x_1} \int_{x_3} [\sigma_{11} \cdot \delta \epsilon_{11} + \sigma_{33} \cdot \delta \epsilon_{33} + 2 \cdot \sigma_{13} \cdot \delta \epsilon_{13}] dx_3 dx_1 \quad (163)$$

Aproximando linealmente cada variación de la deformación unitaria en (162), se obtiene lo siguiente

$$\begin{aligned} \delta W_i = \int_{x_1} \int_{x_3} \left(\sigma_{11} \delta \epsilon_{11}^{(0)} + \sigma_{11} \delta \epsilon_{11}^{(1)} x_3 + \sigma_{33} \delta \epsilon_{33}^{(0)} + \sigma_{33} \delta \epsilon_{33}^{(1)} x_3 + 2 \sigma_{13} \delta \epsilon_{13}^{(0)} \right. \\ \left. + 2 \sigma_{13} \delta \epsilon_{13}^{(1)} x_3 \right) dx_3 dx_1 \end{aligned} \quad (164)$$

Aplicando la integral en X a cada término basándose en los criterios obtenidos en la secciones (144) para calcular los esfuerzos resultantes, se arriba a la siguiente expresión general para el trabajo interno en vigas.

$$\delta W_i = \int_{x_1} \left(N_{11} \delta \varepsilon_{11}^{(0)} + M_{11} \delta \varepsilon_{11}^{(1)} x_3 + N_{33} \delta \varepsilon_{33}^{(0)} + M_{33} \delta \varepsilon_{33}^{(1)} x_3 + 2N_{13} \delta \varepsilon_{13}^{(0)} + 2M_{13} \delta \varepsilon_{13}^{(1)} x_3 \right) dx_1 \quad (165)$$

Siendo los esfuerzos resultantes:

$$\begin{aligned} N_{11} &= C_{1111}^{(0)} \varepsilon_{11}^{(0)} + C_{1133}^{(0)} \varepsilon_{33}^{(0)} \\ M_{11} &= C_{1111}^{(2)} \varepsilon_{11}^{(1)} + C_{1133}^{(2)} \varepsilon_{33}^{(1)} \\ N_{33} &= C_{1133}^{(0)} \varepsilon_{11}^{(0)} + C_{3333}^{(0)} \varepsilon_{33}^{(0)} \\ M_{33} &= C_{1133}^{(2)} \varepsilon_{11}^{(1)} + C_{3333}^{(2)} \varepsilon_{33}^{(1)} \\ N_{13} &= C_{1313}^{(0)} (2\varepsilon_{13}^{(0)}) \\ M_{13} &= C_{1313}^{(2)} (2\varepsilon_{13}^{(1)}) \end{aligned} \quad (166)$$

Donde, de la Ley Generalizada de Hooke, se sabe que:

$$\begin{aligned} C_{1111} &= C_{2222} = C_{3333} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \\ C_{1122} &= C_{2233} = C_{1133} = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \\ C_{2323} &= C_{1313} = C_{1212} = \frac{E}{2(1+\nu)} = G \text{ (Módulo de corte)} \end{aligned} \quad (167)$$

La ecuación (165) se deberá agrupar con (140) para dar forma a la formulación débil mediante el Principio de los Trabajos Virtuales, incluyendo el modelo de elementos finitos parámetro desconocido (desplazamientos). Posteriormente, se debe agrupar aquellos términos que tengan variables en común para determinar los coeficientes de la matriz de rigidez.

3.2 Caso Timoshenko.

La teoría de Timoshenko considera el siguiente campo de desplazamientos

$$v_1 = u(x_1) + \phi_1(x_1) \cdot x_3 \quad (168)$$

$$v_2 = 0 \quad (169)$$

$$v_3 = w(x_1) \quad (170)$$

A partir del cual se obtiene las siguientes deformaciones unitarias:

$$\varepsilon_{11} = \frac{dv_1}{dx_1} = \frac{du}{dx_1} + \frac{d\phi_1}{dx_1} \cdot x_3 \quad (171)$$

$$\varepsilon_{13} = \frac{1}{2} \left(\frac{dv_1}{dx_3} + \frac{dv_3}{dx_1} \right) = \frac{1}{2} \left(\phi_1 + \frac{dw}{dx_1} \right) \quad (172)$$

Siendo sus respectivas componentes unitarias.

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_{11}^{(0)} + \varepsilon_{11}^{(1)} \cdot x_3 \quad ; \quad \varepsilon_{11}^{(0)} = \frac{du}{dx_1} \quad , \quad \varepsilon_{11}^{(1)} = \frac{d\phi_1}{dx_1} \quad (173)$$

$$\varepsilon_{13} = \varepsilon_{13}^{(0)} + \varepsilon_{13}^{(1)} \cdot x_3 \quad ; \quad \varepsilon_{13}^{(0)} = \frac{1}{2} \left(\phi_1 + \frac{dw}{dx_1} \right) \quad , \quad \varepsilon_{13}^{(1)} = 0 \quad (174)$$

3.2.1. Formulación Débil.

La variación del trabajo virtual interno correspondiente a la teoría de Timoshenko es la siguiente.

$$\delta W_i = \int_{x_1} \left(N_{11} \delta \varepsilon_{11}^{(0)} + M_{11} \delta \varepsilon_{11}^{(1)} x_3 + N_{13} (2 \delta \varepsilon_{13}^{(0)}) \right) dx_1 \quad (175)$$

Para la Teoría de Timoshenko, es válido afirmar que el valor de v es nulo, por lo cual sus esfuerzos resultantes son los siguientes:

$$\begin{aligned}
 N_{11} &= E \cdot A \cdot \varepsilon_{11}^{(0)} \rightarrow N_{11} = EA \frac{du}{dx_1} \\
 M_{11} &= E \cdot I \cdot \varepsilon_{11}^{(1)} \rightarrow M_{11} = EI \frac{d\phi_1}{dx_1} \\
 N_{13} &= \frac{E}{2} \left(2\varepsilon_{13}^{(0)} \right) \rightarrow N_{13} = GAK_S \left(\phi_1 + \frac{dw}{dx_1} \right)
 \end{aligned} \tag{176}$$

Sustituyendo (175) en (176) se obtiene:

$$\delta W_i = \int_{x_1} \left(EA \frac{du}{dx_1} \frac{d\delta u}{dx_1} + EI \frac{d\phi_1}{dx_1} \frac{d\delta \phi_1}{dx_1} + GAK_S \left(\phi_1 + \frac{dw}{dx_1} \right) \left(\delta \phi_1 + \frac{d\delta w}{dx_1} \right) \right) dx_1 \tag{177}$$

Aplicando el Principio de los Trabajos Virtuales, se obtiene la formulación débil para el caso Timoshenko

$$\begin{aligned}
 \delta W_i - \delta W_e &= \int_{x_1} \left(EA \frac{du}{dx_1} \frac{d\delta u}{dx_1} - F_1 \cdot \delta u + EI \frac{d\phi_1}{dx_1} \frac{d\delta \phi_1}{dx_1} \right. \\
 &\quad \left. + GAK_S \left(\phi_1 + \frac{dw}{dx_1} \right) \left(\delta \phi_1 + \frac{d\delta w}{dx_1} \right) - F_3 \cdot \delta w \right) dx_1
 \end{aligned} \tag{178}$$

3.2.2. Modelo de Elementos Finitos.

Posteriormente, se debe incluir las siguientes aproximaciones a través del método de los elementos finitos.

$$\begin{aligned}
 u(x) &= \sum_{i=1}^{P+1} u_i \Psi_i(x) \\
 \phi_1(x) &= \sum_{i=1}^{P+1} \phi_{1i} \Psi_i(x)
 \end{aligned} \tag{179}$$

$$w(x) = \sum_{i=1}^{P+1} w_i \Psi_i(x)$$

Es preciso resaltar que, una vez que cada uno de esos modelos abstractos sean introducidos en la formulación débil, se verán afectados por las respectivas derivadas y/u operadores variacionales δ . Por ello, es preciso recalcar que las derivadas afectarán únicamente a las funciones de aproximación y los operadores variacionales δ a los coeficientes de desplazamiento. Veamos un ejemplo.

$$\frac{d\delta u}{dx_1} = \delta u \cdot \frac{d\Psi_i}{dx_1} \quad (180)$$

En tal sentido, es necesario reordenar la formulación variacional de manera que se agrupen aquellos términos que comparten coeficientes similares y poder obtener fácilmente los componentes de las matrices de rigidez. Se obtiene lo siguiente.

$$\begin{aligned} \delta W_i - \delta W_e = \int_{x_1} \left\{ \left(EA \frac{du}{dx_1} \frac{d\delta u}{dx_1} - F_1 \cdot \delta u \right) + \left(EI \frac{d\phi_1}{dx_1} \frac{d\delta \phi_1}{dx_1} + GAK_S \phi_1 \delta \phi_1 \right) \right. \\ \left. + \left(GAK_S \frac{dw}{dx_1} \frac{d\delta w}{dx_1} - F_3 \cdot \delta w \right) \right. \\ \left. + \left(GAK_S \delta \phi_1 \frac{dw}{dx_1} + GAK_S \phi_1 \frac{d\delta w}{dx_1} \right) \right\} dx_1 \quad (181) \end{aligned}$$

Sustituyendo (179) en (181), se obtiene lo siguiente:

Expresión 01

$$\int_{x_1} \left(EA \frac{du}{dx_1} \frac{d\delta u}{dx_1} - F_1 \cdot \delta u \right) dx_1 = 0 \quad (182)$$

$$\delta u \cdot \left\{ \left(\sum_{i=1}^{P+1} u_i \right) \cdot \int_{x_1} \left(EA \frac{d\Psi_i}{dx_1} \frac{d\Psi_j}{dx_1} \right) dx_1 - \int_{x_1} F_1 \cdot \Psi_j dx_1 \right\} = 0 \quad (183)$$

$$k_{ij}^{01} = \int_{x_1} \left(EA \cdot \frac{d\Psi_i}{dx_1} \frac{d\Psi_j}{dx_1} \right) dx_1 \quad ; \quad F_1^j = \int_{x_1} f \cdot \Psi_j dx_1 \quad (184)$$

Expresión 02

$$\int_{x_1} \left(EI \frac{d\phi_1}{dx_1} \frac{d\delta\phi_1}{dx_1} + GAK_S \phi_1 \delta\phi_1 \right) dx_1 = 0 \quad (185)$$

$$\delta\phi_1 \cdot \left\{ \left(\sum_{i=1}^{P+1} \phi_{1i} \right) \cdot \int_{x_1} \left(EI \frac{d\Psi_i}{dx_1} \frac{d\Psi_j}{dx_1} + GAK_S \Psi_i \Psi_j \right) dx_1 \right\} = 0 \quad (186)$$

$$k_{ij}^{02} = \int_{x_1} \left(EI \frac{d\Psi_i}{dx_1} \frac{d\Psi_j}{dx_1} + GAK_S \Psi_i \Psi_j \right) dx_1 \quad (187)$$

Expresión 03

$$\int_{x_1} \left(GAK_S \frac{dw}{dx_1} \frac{d\delta w}{dx_1} - F_3 \cdot \delta w \right) dx_1 = 0 \quad (188)$$

$$\delta w \cdot \left\{ \left(\sum_{j=1}^{P+1} w_j \right) \cdot \int_{x_1} \left(GAK_S \frac{d\Psi_i}{dx_1} \frac{d\Psi_j}{dx_1} \right) dx_1 - \int_{x_1} F_3 \cdot \Psi_i dx_1 \right\} = 0 \quad (189)$$

Expresión 04

$$\int_{x_1} \left(GAK_S \delta\phi_1 \frac{dw}{dx_1} + GAK_S \phi_1 \frac{d\delta w}{dx_1} \right) dx_1 = 0 \quad (190)$$

$$\delta\phi_1 \cdot \left\{ \left(\sum_{j=1}^{P+1} w_j \right) \cdot \int_{x_1} \left(GAK_S \frac{d\Psi_i}{dx_1} \Psi_j \right) dx_1 \right\} = 0 \quad (191)$$

$$k_{ij}^{04-1} = \int_{x_1} \left(GAK_S \frac{d\Psi_i}{dx_1} \Psi_j \right) dx_1 \quad (192)$$

$$\delta w. \left\{ \left(\sum_{i=1}^{P+1} \phi_{1i} \right) \cdot \int_{x_1} \left(GAK_S \Psi_i \frac{d\Psi_j}{dx_1} \right) dx_1 \right\} = 0 \quad (193)$$

$$k_{ij}^{04-2} = \int_{x_1} \left(GAK_S \Psi_i \frac{d\Psi_j}{dx_1} \right) dx_1 \quad (194)$$

3.3. Caso First Shear Deformation Theory

Para la presente tesis, se aplicará la Teoría FSDT con ciertas modificaciones en los efectos de la sección transversal de la viga, de manera que se pueda trabajar con 5 grados de libertad por cada nodo en el modelo de elementos finitos, obteniendo como consecuencia automática una mayor confiabilidad en los resultados del análisis estructural respectivo.

Asimismo, cabe resaltar que esta teoría innovadora es muy similar a la Teoría de Vigas de Timoshenko. La diferencia radica en el campo de desplazamientos asignados para la sección transversal del elemento, ya que no se considerarán constantes (como sí ocurre con la teoría de Timoshenko). Esto se logra cuando, mediante Expansión de Taylor, el campo de desplazamientos de la sección transversal se amplíe a una aproximación cuadrática, aumentando también los grados de libertad de 3 (Timoshenko) a 5 por nodo. Lo mencionado hasta ahora se detalla a continuación.

Para la Teoría FSDT se planteará el siguiente campo de desplazamientos

$$v_1 = u(x_1) + \phi_1(x_1) \cdot x_3 \quad (195)$$

$$v_2 = 0 \quad (196)$$

$$w(x_1) + \phi_3(x_1) \cdot x_3 + \psi_3(x_1) \cdot x_3^2 \quad (197)$$

Figura 3.1 Esquema del Improved First Shear Deformation Theory mostrando los ejes de referencia a utilizar. Fuente propia.

Se observa que tenemos cinco parámetros desconocidos, los cuales definen los grados de libertad por nodo en cada elemento. Así, tenemos que u y w son los desplazamientos a lo largo del eje axial de la viga y del eje de la sección transversal de la misma respectivamente; ϕ_1 y ϕ_3 son las denotaciones de rotación del eje axial y transversal respectivamente de la viga; y ψ_3 denota una rotación adicional del eje transversal

Por otro lado, del campo de desplazamientos se obtiene las siguientes deformaciones unitarias:

$$\epsilon_{11} = \frac{dv_1}{dx_1} = \frac{du}{dx_1} + \frac{d\phi_1}{dx_1} \cdot x_3 \quad (198)$$

$$\epsilon_{13} = \frac{1}{2} \left(\frac{dv_1}{dx_3} + \frac{dv_3}{dx_1} \right) = \frac{1}{2} \left(\phi_1 + \frac{dw}{dx_1} + \frac{d\phi_3}{dx_1} \cdot x_3 + \frac{d\psi_3}{dx_1} \cdot x_3^2 \right) \quad (199)$$

$$\epsilon_{33} = \frac{dv_3}{dx_3} = \phi_3 + 2\psi_3 \cdot x_3 \quad (200)$$

Se despreciará el término cuadrático de la ecuación (199),

Por expansión de Taylor, las deformaciones unitarias tendrán aproximación (expansión) lineal, tomando la siguiente forma:

$$\epsilon_{ij} = \epsilon_{ij}^{(0)} + \epsilon_{ij}^{(1)} \cdot x_3 \quad (201)$$

Donde:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{11} &= \varepsilon_{11}^{(0)} + \varepsilon_{11}^{(1)} \cdot x_3 \quad ; \quad \varepsilon_{11}^{(0)} = \frac{du}{dx_1} \quad , \quad \varepsilon_{11}^{(1)} = \frac{d\phi_1}{dx_1} \\
\varepsilon_{13} &= \varepsilon_{13}^{(0)} + \varepsilon_{13}^{(1)} \cdot x_3 \quad ; \quad \varepsilon_{13}^{(0)} = \frac{1}{2} \left(\phi_1 + \frac{dw}{dx_1} \right) \quad , \quad \varepsilon_{13}^{(1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{d\phi_3}{dx_1} \right) \\
\varepsilon_{33} &= \varepsilon_{33}^{(0)} + \varepsilon_{33}^{(1)} \cdot x_3 \quad ; \quad \varepsilon_{33}^{(0)} = \phi_3 \quad , \quad \varepsilon_{33}^{(1)} = 2\psi_3
\end{aligned} \tag{202}$$

3.3.1. Formulación Débil.

La formulación del trabajo interno para esta teoría es la siguiente:

$$\begin{aligned}
\delta W_i &= \int_{x_1} \left(N_{11} \delta \varepsilon_{11}^{(0)} + M_{11} \delta \varepsilon_{11}^{(1)} x_3 + N_{33} \delta \varepsilon_{33}^{(0)} + M_{33} \delta \varepsilon_{33}^{(1)} x_3 + 2N_{13} \delta \varepsilon_{13}^{(0)} \right. \\
&\quad \left. + 2M_{13} \delta \varepsilon_{13}^{(1)} x_3 \right) dx_1
\end{aligned} \tag{203}$$

Para la Teoría FSDT, el valor de u toma importancia, por lo cual sus esfuerzos resultantes son los planteados en la ecuación (166), adquiriendo la siguiente forma desarrollada.

$$\begin{aligned}
N_{11} &= C_{1111} \cdot A \cdot \frac{du}{dx_1} + C_{1133} \cdot A \cdot \phi_3 \\
M_{11} &= C_{1111} \cdot I \cdot \frac{d\phi_1}{dx_1} + C_{1133} \cdot I \cdot (2\psi_3) \\
N_{33} &= C_{1133} \cdot A \cdot \frac{du}{dx_1} + C_{3333} \cdot A \cdot \phi_3 \\
M_{33} &= C_{1133} \cdot I \cdot \frac{d\phi_1}{dx_1} + C_{3333} \cdot I \cdot (2\psi_3) \\
N_{13} &= C_{1313} \cdot A \cdot \left(\phi_1 + \frac{dw}{dx_1} \right) = GAK_s \left(\phi_1 + \frac{dw}{dx_1} \right)
\end{aligned} \tag{204}$$

$$M_{13} = C_{1313} \cdot I \cdot \left(\frac{d\phi_3}{dx_1} \right) = GIK_S \left(\frac{d\phi_3}{dx_1} \right)$$

Sustituyendo (204) en (203) se obtiene:

$$\begin{aligned} \delta W_i = \int_{x_1} \left\{ \left(C_{1111} \cdot A \cdot \frac{du}{dx_1} + C_{1133} \cdot A \cdot \phi_3 \right) \frac{d\delta u}{dx_1} \right. \\ + \left(C_{1111} \cdot I \cdot \frac{d\phi_1}{dx_1} + C_{1133} \cdot I \cdot (2\psi_3) \right) \cdot \frac{d\delta\phi_1}{dx_1} \\ + \left(C_{1133} \cdot A \cdot \frac{du}{dx_1} + C_{3333} \cdot A \cdot \phi_3 \right) \cdot \delta\phi_3 \\ + \left(C_{1133} \cdot I \cdot \frac{d\phi_1}{dx_1} + C_{3333} \cdot I \cdot (2\psi_3) \right) \cdot (2\delta\psi_3) \\ \left. + GAK_S \left(\phi_1 + \frac{dw}{dx_1} \right) \cdot \left(\delta\phi_1 + \frac{d\delta w}{dx_1} \right) + GIK_S \left(\frac{d\phi_3}{dx_1} \right) \cdot \frac{d\delta\phi_3}{dx_1} \right\} dx_1 \end{aligned} \quad (205)$$

Incluyendo la variación del trabajo interno y reordenando todos los componentes de la ecuación, de manera que sea más fácil obtener las matrices de rigidez, se obtiene la siguiente formulación:

$$\begin{aligned} \delta W_i - \delta W_e = \int_{x_1} \left\{ \left(C_{1111} A \frac{du}{dx_1} \frac{d\delta u}{dx_1} - F_1 \delta u \right) + \left(C_{1111} I \frac{d\phi_1}{dx_1} \frac{d\delta\phi_1}{dx_1} + GAK_S \phi_1 \delta\phi_1 \right) \right. \\ + \left(GAK_S \frac{dw}{dx_1} \frac{d\delta w}{dx_1} - F_3 \delta w \right) + \left(C_{3333} A \phi_3 \delta\phi_3 + GIK_S \frac{d\phi_3}{dx_1} \frac{d\delta\phi_3}{dx_1} \right) \\ + (C_{3333} I (4\psi_3 \delta\psi_3)) + \left(C_{1133} A \phi_3 \frac{d\delta u}{dx_1} + C_{1133} A \delta\phi_3 \frac{du}{dx_1} \right) \\ + \left(C_{1133} I (2\psi_3) \frac{d\delta\phi_1}{dx_1} + C_{1133} I (2\delta\psi_3) \frac{d\phi_1}{dx_1} \right) \\ \left. + \left(GAK_S \phi_1 \frac{d\delta w}{dx_1} + GAK_S \delta\phi_1 \frac{dw}{dx_1} \right) \right\} dx_1 = 0 \end{aligned} \quad (206)$$

3.3.2 Modelo de Elementos Finitos.

El modelo de elementos finitos es desarrollado para cada grado de libertad (u , ϕ_1 , w , ϕ_3 , ψ_3) utilizando funciones de aproximación ψ_i de Lagrange. Entonces, se plantea lo siguiente.

$$u(x) = \sum_{i=1}^{P+1} u_i \Psi_i(x)$$

$$\phi_1(x) = \sum_{i=1}^{P+1} \phi_{1i} \Psi_i(x)$$

$$w(x) = \sum_{i=1}^{P+1} w_i \Psi_i(x) \quad (207)$$

$$\phi_3(x) = \sum_{i=1}^{P+1} \phi_{3i} \Psi_i(x)$$

$$\psi_3(x) = \sum_{i=1}^{P+1} \psi_{3i} \Psi_i(x)$$

Sustituyendo (207) en cada expresión de (206), se obtiene lo siguiente.

Expresión 01:

$$\int_{x_1} \left(C_{1111} A \frac{du}{dx_1} \frac{d\delta u}{dx_1} - F_1 \delta u \right) dx_1 = 0 \quad (208)$$

$$\delta u \cdot \left\{ \left(\sum_{i=1}^{P+1} u_i \right) \cdot \int_{x_1} \left(C_{1111} A \cdot \frac{d\Psi_i}{dx_1} \frac{d\Psi_j}{dx_1} \right) dx_1 - \int_{x_1} F_1 \Psi_j dx_1 \right\} = 0 \quad (209)$$

$$k_{ij}^{01} = \int_{x_1} \left(C_{1111} A \cdot \frac{d\Psi_i}{dx_1} \frac{d\Psi_j}{dx_1} \right) dx_1 \quad ; \quad F_1^j = \int_{x_1} F_1 \Psi_j dx_1 \quad (210)$$

Expresión 02:

$$\int_{x_1} \left(C_{1111} I \frac{d\phi_1}{dx_1} \frac{d\delta\phi_1}{dx_1} + GAK_S \phi_1 \delta\phi_1 \right) dx_1 = 0 \quad (211)$$

$$\delta\phi_1 \cdot \left\{ \left(\sum_{i=1}^{P+1} \phi_{1i} \right) \cdot \int_{x_1} \left(C_{1111} I \frac{d\Psi_i}{dx_1} \frac{d\Psi_j}{dx_1} + GAK_S \Psi_i \Psi_j \right) dx_1 \right\} = 0 \quad (212)$$

$$k_{ij}^{02} = \int_{x_1} \left(C_{1111} I \frac{d\Psi_i}{dx_1} \frac{d\Psi_j}{dx_1} + GAK_S \Psi_i \Psi_j \right) dx_1 \quad (213)$$

Expresión 03:

$$\int_{x_1} \left(GAK_S \frac{dw}{dx_1} \frac{d\delta w}{dx_1} - F_3 \delta w \right) dx_1 = 0 \quad (214)$$

$$\delta w \cdot \left\{ \left(\sum_{i=1}^{P+1} w_i \right) \cdot \int_{x_1} \left(GAK_S \frac{d\Psi_i}{dx_1} \frac{d\Psi_j}{dx_1} \right) dx_1 - \int_{x_1} F_3 \Psi_i dx_1 \right\} = 0 \quad (215)$$

$$k_{ij}^{03} = \int_{x_1} \left(GAK_S \frac{d\Psi_i}{dx_1} \frac{d\Psi_j}{dx_1} \right) dx_1 \quad ; \quad F_3^j = \int_{x_1} F_3 \Psi_i dx_1 \quad (216)$$

Expresión 04:

$$\int_{x_1} \left(C_{3333} A \phi_3 \delta \phi_3 + GIK_S \frac{d\phi_3}{dx_1} \frac{d\delta \phi_3}{dx_1} \right) dx_1 = 0 \quad (217)$$

$$\delta \phi_3 \cdot \left\{ \left(\sum_{i=1}^{P+1} \phi_{3i} \right) \cdot \int_{x_1} \left(C_{3333} A \Psi_i \Psi_j + GIK_S \frac{d\Psi_i}{dx_1} \frac{d\Psi_j}{dx_1} \right) dx_1 \right\} = 0 \quad (218)$$

$$k_{ij}^{04} = \int_{x_1} \left(C_{3333} A \Psi_i \Psi_j + GIK_S \frac{d\Psi_i}{dx_1} \frac{d\Psi_j}{dx_1} \right) dx_1 \quad (219)$$

Expresión 05:

$$\int_{x_1} (C_{3333} I(4\psi_3 \delta\psi_3)) dx_1 = 0 \quad (220)$$

$$\delta\psi_3 \cdot \left\{ \left(\sum_{i=1}^{P+1} \psi_{3i} \right) \cdot \int_{x_1} (C_{3333} I(4 \cdot \Psi_i \Psi_j)) dx_1 \right\} = 0 \quad (221)$$

$$k_{ij}^{05} = \int_{x_1} (C_{3333} I(4 \cdot \Psi_i \Psi_j)) dx_1 \quad (3.1.85) \quad (222)$$

Expresión 06:

$$\int_{x_1} \left(C_{1133} A \phi_3 \frac{d\delta u}{dx_1} + C_{1133} A \delta\phi_3 \frac{du}{dx_1} \right) dx_1 = 0 \quad (223)$$

$$\delta u \cdot \left\{ \left(\sum_{i=1}^{P+1} \phi_{3i} \right) \cdot \int_{x_1} \left(C_{1133} A \Psi_i \frac{d\Psi_j}{dx_1} \right) dx_1 \right\} = 0 \quad (224)$$

$$k_{ij}^{06-1} = \int_{x_1} \left(C_{1133} A \Psi_i \frac{d\Psi_j}{dx_1} \right) dx_1 \quad (225)$$

$$\delta\phi_3 \cdot \left\{ \left(\sum_{j=1}^{P+1} u_j \right) \cdot \int_{x_1} \left(C_{1133} A \frac{d\Psi_i}{dx_1} \Psi_j \right) dx_1 \right\} = 0 \quad (226)$$

$$k_{ij}^{06-2} = \int_{x_1} \left(C_{1133} A \frac{d\Psi_i}{dx_1} \Psi_j \right) dx_1 \quad (227)$$

Expresión 07:

$$\int_{x_1} \left(C_{1133} I(2\psi_3) \frac{d\delta\phi_1}{dx_1} + C_{1133} I(2\delta\psi_3) \frac{d\phi_1}{dx_1} \right) dx_1 = 0 \quad (228)$$

$$\delta\phi_1 \cdot \left\{ \left(\sum_{i=1}^{P+1} \psi_{3i} \right) \cdot \int_{x_1} \left(2C_{1133} I \Psi_i \frac{d\Psi_j}{dx_1} \right) dx_1 \right\} = 0 \quad (229)$$

$$k_{ij}^{07-1} = \int_{x_1} \left(2 \cdot C_{1133} \cdot I \cdot \Psi_i \frac{d\Psi_j}{dx_1} \right) dx_1 \quad (230)$$

$$\delta\psi_3 \cdot \left\{ \left(\sum_{j=1}^{P+1} \phi_{1j} \right) \cdot \int_{x_1} \left(2C_{1133} I \frac{d\Psi_i}{dx_1} \Psi_j \right) dx_1 \right\} = 0 \quad (231)$$

$$k_{ij}^{07-2} = \int_{x_1} \left(2C_{1133} I \frac{d\Psi_i}{dx_1} \Psi_j \right) dx_1 \quad (232)$$

Expresión 08:

$$\int_{x_1} \left(GAK_S \phi_1 \frac{d\delta w}{dx_1} + GAK_S \delta\phi_1 \frac{dw}{dx_1} \right) dx_1 = 0 \quad (233)$$

$$\delta w \cdot \left\{ \left(\sum_{i=1}^{P+1} \phi_{1i} \right) \cdot \int_{x_1} \left(GAK_S \Psi_i \frac{d\Psi_j}{dx_1} \right) dx_1 \right\} = 0 \quad (234)$$

$$k_{ij}^{08-1} = \int_{x_1} \left(GAK_S \Psi_i \frac{d\Psi_j}{dx_1} \right) dx_1 \quad (235)$$

$$\delta\phi_1 \cdot \left\{ \left(\sum_{j=1}^{P+1} w_j \right) \cdot \int_{x_1} \left(GAK_S \frac{d\Psi_i}{dx_1} \Psi_j \right) dx_1 \right\} = 0 \quad (236)$$

$$k_{ij}^{08-2} = \int_{x_1} \left(GAK_s \frac{d\Psi_i}{dx_1} \Psi_j \right) dx_1 \quad (237)$$

3.4. Formulación débil bajo mediante la aplicación de Teorías no locales

J.N.Reddy (2010) plantea la siguiente denotación general de los esfuerzos resultantes bajo enfoque no local.

$$N_{ij}^{nl} - \mu \cdot \frac{d^2 N_{ij}^{nl}}{dx^2} = N_{ij} \quad (238)$$

$$M_{ij}^{nl} - \mu \cdot \frac{d^2 M_{ij}^{nl}}{dx^2} = M_{ij} \quad (239)$$

3.4.1. Caso Timoshenko.

La formulación variacional de la Teoría de Timoshenko puede reordenarse para propósitos de esta sección, planteándose la siguiente expresión.

$$\begin{aligned} \delta W_i = \int_{x_1} \left\{ \left(-F_1 \cdot \delta u + N_{11} \frac{d\delta u}{dx_1} \right) + \left(N_{13} \delta \phi_1 + M_{11} \frac{d\delta \phi_1}{dx_1} \right) \right. \\ \left. + \left(-F_3 \cdot \delta w + N_{13} \frac{d\delta w}{dx_1} \right) \right\} dx_1 \end{aligned} \quad (240)$$

Por cada expresión agrupada, se obtienen las siguientes ecuaciones de equilibrio de Euler-Lagrange:

$$\frac{dN_{11}^{nl}}{dx} + F_1 = 0 \quad (241)$$

$$\frac{dM_{11}^{nl}}{dx} - N_{13}^{nl} = 0 \quad (242)$$

$$\frac{dN_{13}^{nl}}{dx} + F_3 = 0 \quad (243)$$

Ahora, se procede a calcular los esfuerzos resultantes no locales

- **Para N_{11}^{nl} :**

Se tiene la notación general.

$$N_{11}^{nl} - \mu \cdot \frac{d^2 N_{11}^{nl}}{dx^2} = N_{11} \quad (244)$$

Se deriva la expresión (241), obteniendo lo siguiente:

$$\frac{d^2 N_{11}^{nl}}{dx^2} = -\frac{dF_1}{dx} \quad (245)$$

Reemplazando (245) en (244) se obtiene:

$$N_{11}^{nl} = N_{11} - \mu \cdot \frac{dF_1}{dx} \quad (246)$$

- **Para M_{11}^{nl} :**

Se tiene la notación general:

$$M_{11}^{nl} - \mu \cdot \frac{d^2 M_{11}^{nl}}{dx^2} = M_{11} \quad (247)$$

Se deriva la expresión (242)

$$\frac{d^2 M_{11}^{nl}}{dx^2} - \frac{dN_{13}^{nl}}{dx} = 0 \quad (248)$$

Reemplazando la ecuación (243) en (248), se obtiene

$$\frac{d^2 M_{11}^{nl}}{dx^2} = -F_3 \quad (249)$$

Sustituyendo (249) en (247), se obtiene

$$M_{11}^{nl} = M_{11} - \mu \cdot F_3 \quad (250)$$

- **Para N_{13}^{nl} :**

Se tiene la notación general:

$$N_{13}^{nl} - \mu \cdot \frac{d^2 N_{13}^{nl}}{dx^2} = N_{13} \quad (251)$$

Derivando la expresión (243), se obtiene:

$$\frac{d^2 N_{13}^{nl}}{dx^2} = -\frac{dF_3}{dx} \quad (252)$$

Reemplazando (252) en (251) se obtiene:

$$N_{13}^{nl} = N_{13} - \mu \cdot \frac{dF_3}{dx} \quad (253)$$

De las expresiones(246),(250) y (253) se puede expandir los esfuerzos resultantes no locales de la Teoría de Timoshenko, quedando de la siguiente manera.

$$\begin{aligned} N_{11}^{nl} &= EA \frac{du}{dx_1} - \mu \cdot \frac{dF_1}{dx} \\ M_{11}^{nl} &= EI \frac{d\phi_1}{dx_1} - \mu \cdot F_3 \end{aligned} \quad (254)$$

$$\begin{aligned} N_{13}^{nl} &= GAK_s \left(\phi_1 + \frac{dw}{dx_1} \right) - \mu \cdot \frac{dF_3}{dx} \\ \int_{x_1} \left\{ \left(-F_1 \cdot \delta u + N_{11} \frac{d\delta u}{dx_1} \right) + \left(N_{13} \delta \phi_1 + M_{11} \frac{d\delta \phi_1}{dx_1} \right) \right. \\ &\quad \left. + \left(-F_3 \cdot \delta w + N_{13} \frac{d\delta w}{dx_1} \right) \right\} dx_1 \end{aligned} \quad (255)$$

Por cada expresión agrupada, se obtienen las siguientes ecuaciones Euler-Lagrange

$$\frac{dN_{11}^{nl}}{dx} + F_1 = 0 \quad (256)$$

$$\frac{dM_{11}^{nl}}{dx} - N_{13}^{nl} = 0 \quad (257)$$

$$\frac{dN_{13}^{nl}}{dx} + F_3 = 0 \quad (258)$$

Ahora, se procede a calcular los esfuerzos resultantes no locales

- **Para N_{11}^{nl} :**

Se tiene la notación general.

$$N_{11}^{nl} - \mu \cdot \frac{d^2 N_{11}^{nl}}{dx^2} = N_{11} \quad (259)$$

Se deriva la expresión (256), obteniendo lo siguiente:

$$\frac{d^2 N_{11}^{nl}}{dx^2} = -\frac{dF_1}{dx} \quad (260)$$

Reemplazando (260) en (259) se obtiene:

$$N_{11}^{nl} = N_{11} - \mu \cdot \frac{dF_1}{dx} \quad (261)$$

- **Para M_{11}^{nl} :**

Se tiene la notación general:

$$M_{11}^{nl} - \mu \cdot \frac{d^2 M_{11}^{nl}}{dx^2} = M_{11} \quad (262)$$

Se deriva la expresión (257)

$$\frac{d^2 M_{11}^{nl}}{dx^2} - \frac{dN_{13}^{nl}}{dx} = 0 \quad (263)$$

Reemplazando la ecuación (258) en (263), se obtiene

$$\frac{d^2 M_{11}^{nl}}{dx^2} = -F_3 \quad (264)$$

Sustituyendo (264) en (262), se obtiene

$$M_{11}^{nl} = M_{11} - \mu \cdot F_3 \quad (265)$$

- **Para N_{13}^{nl} :**

Se tiene la notación general:

$$N_{13}^{nl} - \mu \cdot \frac{d^2 N_{13}^{nl}}{dx^2} = N_{13} \quad (266)$$

Derivando la expresión (258), se obtiene:

$$\frac{d^2 N_{13}^{nl}}{dx^2} = -\frac{dF_3}{dx} \quad (267)$$

Reemplazando (267) en (266) se obtiene:

$$N_{13}^{nl} = N_{13} - \mu \cdot \frac{dF_3}{dx} \quad (268)$$

De las expresiones (261), (265) y (268) se puede expandir los esfuerzos resultantes no locales de la Teoría de Timoshenko, quedando de la siguiente manera.

$$N_{11}^{nl} = EA \frac{du}{dx_1} - \mu \cdot \frac{dF_1}{dx} \quad (269)$$

$$M_{11}^{nl} = EI \frac{d\phi_1}{dx_1} - \mu \cdot F_3$$

$$N_{13}^{nl} = GAK_S \left(\phi_1 + \frac{dw}{dx_1} \right) - \mu \cdot \frac{dF_3}{dx}$$

Se sustituye (269) en la ecuación (240) de trabajo interno y, considerando el trabajo externo δW_e , se aplica el Principio de Trabajos Virtuales. La ecuación (270) muestra la formulación débil no local para la Teoría de Timoshenko.

$$\begin{aligned} \delta W_i - \delta W_e = \int_{x_1} \left\{ EA \frac{du}{dx_1} \frac{d\delta u}{dx_1} - \mu \cdot \frac{dF_1}{dx_1} \frac{d\delta u}{dx_1} - F_1 \delta u + EI \frac{d\phi_1}{dx_1} \frac{d\delta \phi_1}{dx_1} \right. \\ \left. - \mu \cdot F_3 \frac{d\delta \phi_1}{dx_1} + GAK_S \left(\phi_1 + \frac{dw}{dx_1} \right) \left(\delta \phi_1 + \frac{d\delta w}{dx_1} \right) \right. \\ \left. - \mu \cdot \frac{dF_3}{dx} \left(\delta \phi_1 + \frac{d\delta w}{dx_1} \right) - F_3 \cdot \delta w \right\} dx_1 = 0 \end{aligned} \quad (270)$$

Expandiendo la formulación débil y agrupando términos con coeficientes similares (desplazamientos virtuales), se obtienen los siguientes resultados:

Coeficientes de la matriz de rigidez del elemento:

$$k_{ij}^{11} = \int_{x_1} \left(EA \cdot \frac{d\Psi_i}{dx_1} \frac{d\Psi_j}{dx_1} \right) dx_1 \quad (271)$$

$$k_{ij}^{22} = \int_{x_1} \left(EI \frac{d\Psi_i}{dx_1} \frac{d\Psi_j}{dx_1} + GAK_S \Psi_i \Psi_j \right) dx_1 \quad (272)$$

$$k_{ij}^{33} = \int_{x_1} \left(GAK_S \frac{d\Psi_i}{dx_1} \frac{d\Psi_j}{dx_1} \right) dx_1 \quad (273)$$

$$k_{ij}^{23} = k_{ij}^{32} = \int_{x_1} \left(GAK_S \Psi_i \frac{d\Psi_j}{dx_1} \right) dx_1 \quad (274)$$

Componentes del Vector de Fuerzas:

$$F_1 = \int_{x_1} \left(f \cdot \Psi_i + \mu \cdot \frac{df}{dx} \cdot \frac{d\Psi_i}{dx_1} \right) dx_1 \quad (275)$$

$$F_2 = \int_{\Omega} \left(\mu \cdot q \cdot \frac{d\Psi_i}{dx_1} + \mu \cdot \frac{dq}{dx} \cdot \Psi_i \right) d\Omega \quad (276)$$

$$F_3 = \int_{\Omega} \left(\mu \cdot \frac{dq}{dx} \cdot \frac{d\Psi_i}{dx_1} + q \cdot \Psi_i \right) d\Omega \quad (277)$$

3.4.2. Caso First Shear Deformation Theory

Similar al caso Timoshenko, la formulación débil para esta teoría se puede plantear de la siguiente manera:

$$\delta\Pi = \int_{x_1} \left\{ \left(-f \cdot \delta u + N_{11} \frac{d\delta u}{dx_1} \right) + \left(N_{13} \delta\phi_1 + M_{11} \frac{d\delta\phi_1}{dx_1} \right) + \left(-q \cdot \delta w + N_{13} \frac{d\delta w}{dx_1} \right) + \left(N_{33} \cdot \delta\phi_3 + M_{13} \cdot \frac{d\delta\phi_3}{dx} \right) + 2 \cdot \delta\Psi_3 \cdot M_{33} \right\} dx_1 \quad (278)$$

Se obtienen las siguientes ecuaciones de equilibrio de Euler-Lagrange:

$$\frac{dN_{11}^{nl}}{dx} + F_1 = 0 \quad (279)$$

$$\frac{dM_{11}^{nl}}{dx} - N_{13}^{nl} = 0 \quad (280)$$

$$\frac{dN_{13}^{nl}}{dx} + F_3 = 0 \quad (281)$$

$$\frac{dM_{13}^{nl}}{dx} - N_{33}^{nl} = 0 \quad (282)$$

$$M_{33}^{nl} = 0 \quad (283)$$

Realizando el mismo proceso del caso Timoshenko para calcular los esfuerzos resultantes no locales, se descubre inconsistencia en los términos M_{13} , N_{33} y M_{33} . En vista de ello, no se considerarán efectos de no localidad en dichos términos, obteniendo finalmente los siguientes esfuerzos resultantes no locales:

$$N_{11}^{nl} = N_{11} - \mu \cdot \frac{df}{dx} \quad (284)$$

$$M_{11}^{nl} = M_{11} - \mu \cdot q \quad (285)$$

$$N_{13}^{nl} = N_{13} - \mu \cdot \frac{dq}{dx} \quad (286)$$

$$M_{13}^{nl} = M_{13} \quad ; \quad N_{33}^{nl} = N_{33} \quad ; \quad M_{33}^{nl} = M_{33} \quad (287)$$

Sustituyendo las ecuaciones (284) - (287) en (278) y expandiendo los esfuerzos resultantes, se obtiene la formulación débil no local para el caso FSDT:

$$\begin{aligned} \delta \Pi = \int_{\Omega} \left\{ C_{1111} \cdot A \cdot \frac{du}{dx} \cdot \frac{d\delta u}{dx} - \mu \cdot \frac{df}{dx} \cdot \frac{d\delta u}{dx} - f \cdot \delta u + C_{1111} \cdot I \cdot \frac{d\phi_1}{dx} \cdot \frac{d\delta \phi_1}{dx} \right. \\ + GAK_S \cdot \phi_1 \cdot \delta \phi_1 - \mu \cdot \frac{dq}{dx} \cdot \delta \phi_1 - \mu \cdot q \cdot \frac{d\delta \phi_1}{dx} + GAK_S \cdot \frac{dw}{dx} \cdot \frac{d\delta w}{dx} \\ - \mu \cdot \frac{dq}{dx} \cdot \frac{d\delta w}{dx} - q \cdot \delta w + GIK_S \cdot \frac{d\phi_3}{dx} \cdot \frac{d\delta \phi_3}{dx} + C_{3333} \cdot A \cdot \phi_3 \cdot \delta \phi_3 \\ + 4 \cdot C_{3333} \cdot I \cdot \psi_3 \cdot \delta \psi_3 + GAK_S \cdot \frac{dw}{dx} \cdot \delta \phi_1 + GAK_S \cdot \phi_1 \cdot \frac{d\delta w}{dx} \\ + C_{1133} \cdot A \cdot \phi_3 \cdot \frac{d\delta u}{dx} + C_{1133} \cdot A \cdot \delta \phi_3 \cdot \frac{du}{dx} + 2 \cdot C_{1133} \cdot I \cdot \psi_3 \cdot \frac{d\delta \phi_1}{dx} \\ \left. + 2 \cdot C_{1133} \cdot I \cdot \delta \psi_3 \cdot \frac{d\phi_1}{dx} \right\} d\Omega \quad (288) \end{aligned}$$

Similar al caso Timoshenko, los términos de la formulación débil se agrupan de acuerdo a sus coeficientes comunes, obteniendo lo siguiente:

Coeficientes de la matriz de rigidez del elemento:

$$k_{ij}^{11} = \int_{x_1} \left(C_{1111} A \cdot \frac{d\Psi_i}{dx_1} \frac{d\Psi_j}{dx_1} \right) dx_1 \quad (289)$$

$$k_{ij}^{22} = \int_{x_1} \left(C_{1111} I \frac{d\Psi_i}{dx_1} \frac{d\Psi_j}{dx_1} + GAK_S \Psi_i \Psi_j \right) dx_1 \quad (290)$$

$$k_{ij}^{33} = \int_{x_1} \left(GAK_S \frac{d\Psi_i}{dx_1} \frac{d\Psi_j}{dx_1} \right) dx_1 \quad (291)$$

$$k_{ij}^{44} = \int_{x_1} \left(C_{3333} A \Psi_i \Psi_j + GIK_S \frac{d\Psi_i}{dx_1} \frac{d\Psi_j}{dx_1} \right) dx_1 \quad (292)$$

$$k_{ij}^{55} = \int_{x_1} (C_{3333} I (4 \cdot \Psi_i \Psi_j)) dx_1 \quad (293)$$

$$k_{ij}^{23} = k_{ij}^{32} = \int_{x_1} \left(GAK_S \Psi_i \frac{d\Psi_j}{dx_1} \right) dx_1 \quad (294)$$

$$k_{ij}^{14} = k_{ij}^{41} = \int_{x_1} \left(C_{1133} \cdot A \cdot \Psi_i \frac{d\Psi_j}{dx_1} \right) dx_1 \quad (295)$$

$$k_{ij}^{25} = k_{ij}^{52} = \int_{x_1} \left(2 \cdot C_{1133} \cdot I \cdot \Psi_i \frac{d\Psi_j}{dx_1} \right) dx_1 \quad (296)$$

Componentes del Vector de Fuerzas:

$$F_1 = \int_{x_1} \left(f \cdot \Psi_i + \mu \cdot \frac{df}{dx} \cdot \frac{d\Psi_i}{dx_1} \right) dx_1 \quad (297)$$

$$F_2 = \int_{\Omega} \left(\mu \cdot q \cdot \frac{d\Psi_i}{dx_1} + \mu \cdot \frac{dq}{dx} \cdot \Psi_i \right) d\Omega \quad (298)$$

$$F_3 = \int_{\Omega} \left(\mu \cdot \frac{dq}{dx} \cdot \frac{d\Psi_i}{dx_1} + q \cdot \Psi_i \right) d\Omega \quad (299)$$

Se puede apreciar que el vector de fuerzas correspondiente al caso no local de FSDT es el mismo que el de Timoshenko; ello se debe a la asumsi3n hecha con respecto a los t6rminos M_{13} , N_{33} y M_{33} , los cuales no tienen efecto de no localidad.

4. RESULTADOS

En la presente investigación se realizan el análisis lineal local y no-local de ejemplos. Para ello se utilizó una herramienta de cálculo en Matlab.

4.1 Aplicación del Análisis Lineal Local a través del método de los elementos Finitos

En esta sección se desarrollarán los resultados procesados a través de la herramienta computacional en Matlab para los ejemplos en casos Lineales Locales. Se desarrollará los ejemplos utilizando distintas discretizaciones para poder posteriormente evaluar su proximidad o su convergencia según el número de elementos y grado del polinomio de interpolación.

4.1.1 Verificación de los resultados

Se realizan las pruebas para validar los resultados de la investigación. En la mecánica clásica se han podido establecer fórmulas para poder representar ciertos aspectos, como la deformación, para casos típicos y simples. Algunos de estos casos suelen ser vigas Cantiléver y vigas simplemente apoyadas en sus extremos. Estos casos también son típicos para verificaciones de modelos de elementos finitos de vigas. A partir de la mecánica clásica de materiales se puede obtener, según Bucciarelli (2009):

Caso empotrado:

Figura 4.1.1. Representación del deformación de una viga cantilever Adaptado << Engineering Mechanics for Structures>>, por Bucciarelli, (2009).

Para $0 < x < L$

$$W(x) = \left(\frac{PL^3}{6EI} \right) \left(3 \left(\frac{x}{L} \right)^2 - \left(\frac{x}{L} \right)^3 \right) \quad (300)$$

Caso simplemente apoyado:

Figura 4.1.2. Representación del deformación de una simplemente apoyada << Engineering Mechanics for Structures>>, por Bucciarelli, (2009).

Para $b=L/2$

Para $0 < x < b$

$$V(x) = \frac{pl^3 \left(2\left(\frac{x}{L} - 0.5\right)^3 - \frac{3x}{4L} \right)}{12EI} \quad (301)$$

4.1.2 Resultados Numéricos

4.1.2.1 Ejemplo 1

El ejemplo 1 implica el análisis de una viga cantiléver (empotrada), la cual tiene una carga puntual en su otro extremo tal como se puede apreciar en la figura

Figura 4.1.3. Problemas a resolver para el caso 1. Adaptado de << A new displacement-based framework for non-local Timoshenko beams >> por Failla, Sofi, & Zingales, (2015)

Asimismo, se tienen los siguientes datos:

$$L = 300\mu m, \quad h = \frac{L}{20} = 15\mu m, \quad b = 30\mu m, \quad P = 10\mu N, \quad E = 1.40, GPa, \quad \nu = 0.35$$

A partir de la ecuación (300) (flecha en el gráfico) se comparó con los resultados obtenidos con la herramienta de cálculo.

Grafico 4.1.1. Resultado del procesamiento en Matlab del problema 1. Fuente Propia

Se puede apreciar que para una discretización de 3 elementos con funciones de interpolación de grado 3,5,10 existe un error mínimo o imperceptible (se transponen en el gráfico) con la solución de la ecuación.

4.1.2.2 Ejemplo 2

El ejemplo 2 implica el análisis de una viga simplemente apoyada en sus dos extremos, sometida a una carga puntal **en el centro**.

Figura 4.1.4. Problemas a resolver para el caso 2. Adaptado de << A new displacement-based framework for non-local Timoshenko beams >> por Failla, Sofi, & Zingales, (2015)

$$L = 300\mu m, \quad h = \frac{L}{20} = 15\mu m, \quad b = 30\mu m, \quad P = 10\mu N, \quad E = 1.40, GPa, \quad \nu = 0.35$$

A partir de la ecuación (301) (flecha en el gráfico) se comparó con los resultados obtenidos con la herramienta de cálculo.

Gráfico 4.1.2. Resultado del procesamiento en Matlab del problema 2. Fuente Propia

Se puede apreciar que para una discretización de 4 y 6 elementos con funciones de interpolación de grado 4 y 6 existe un error mínimo o imperceptible (se transponen en el gráfico) con la solución de la ecuación.

4.1.2.3 Ejemplo 3

El ejemplo 3 implica el análisis de una viga empotrada en un extremo y simplemente apoyada a 2/3 de dicho extremo, sometida a una carga puntal en el centro de los apoyos.

$$L = 1m, \quad h = \frac{L}{20} = 15\mu m, \quad b = 30\mu m, \quad P = 10\mu N, \quad E = 5.50 TPa, \quad \nu = 0.19$$

Figura 4.1.5. Problemas a resolver para el caso 3. Adaptado de << Ritz Method Application to Bending, Buckling and Vibration Analyses of Timoshenko Beams via Nonlocal Elasticity >> por Mahdi, 2018

Para el tercer caso, la complejidad de ejemplo se amplía. Como el modelo ya fue verificado con los ejemplos 2 y 3, se puede ver que los resultados convergen con una discretización de 3 elementos y polinomio de grado 4, así como 5 elementos y polinomio de grado 6.

Grafico 4.1.3. Resultado del procesamiento en Matlab del problema 3. Fuente Propia

4.1.2.4 Ejemplo 4

El ejemplo 4 implica el análisis de una viga empotrada en un extremo y simplemente apoyada a $2/3$ de dicho extremo, sometida a una carga puntal en el centro de los apoyos

$$L = 1m, \quad h = \frac{L}{20} = 15\mu m, \quad b = 30\mu m, \quad P = 10\mu N, \quad E = 5.50 \text{ TPa}, \quad \nu = 0.19$$

Figura 4.1.6. Problemas a resolver para el caso 4. Adaptado de << Ritz Method Application to Bending, Buckling and Vibration Analyses of Timoshenko Beams via Nonlocal Elasticity >> por Mahdi, 2018

Para el cuarto caso, la complejidad del ejemplo se amplía, se tienen dos tipos de apoyo diferente, asimismo, ya no se tiene una viga con distribución simétrica. La convergencia de esta viga se da con 4 y 6 elementos y polinomios de interpolación de grado 6 y 8 respectivamente.

Gráfico 4.1.4. Resultado del procesamiento en Matlab del problema 4. Fuente Propia

En los Gráficos 4.1.1 al 4.1.4 se han considerado modelos matemáticos cuyos grados de polinomios de interpolación son relativamente menores ($P = 2$ y 3). Las configuraciones deformadas correspondientes a dichos polinomios se aprecian se aprecia rígida en comparación con aquellas en las que se usaron polinomios de mayor orden. Reddy (2015) identifica este fenómeno como “Shear Locking”, muy frecuente cuando se utilizan polinomios de interpolación de menor orden, ya que estos afectan a los grados de libertad w y ϕ_1 , provocando que la pendiente dw/dx sea igual a $-\phi_1$, lo cual a su vez se traduce en desplazamientos y rotaciones nulas, produciéndose el denominado *shear locking*. El mismo autor plantea que, para evitar este fenómeno, se debe incrementar el grado del polinomio de interpolación.

4.2 Aplicación del Análisis Lineal No Local a través del método de los elementos Finitos

El modelo lineal local cumple con dar un resultado aproximado adecuado. Asimismo, se puede apreciar la importancia de una discretización significativa para que la solución pueda converger, dado que en soluciones con un refinamiento bajo, la variación fue

mucho mayor. Para el ejemplo 1 y 2, el comportamiento de la viga a flexión es el esperado comparado a las ecuaciones de la mecánica convencional.

La utilización de una herramienta de cálculo como la propuesta, permite analizar casos no típicos, a través de métodos no convencionales.

4.2.1 Verificación de los resultados

En la presente sección, se demuestra la validez de nuestra teoría mediante comparación con resultados obtenidos por otros autores. Esta validez se demuestra en dos ejemplos numéricos ya analizados en la literatura.

Figura 4.2.1. Condiciones de borde para diferentes ejemplos numéricos. a) Viga simplemente apoyada, b) Viga bi-empotrada y c) Viga con empotramiento en un extremo y apoyo fijo en el otro extremo.

4.2.2 Resultados Numéricos

4.2.2.1 Ejemplo 5

localidad en nuestra teoría propuesta con los resultados obtenidos en la literatura (Alshorbagy, Eltaher, & Mahmoud, 2013; Reddy, 2007) donde se consideró como ejemplo numérico una viga simplemente apoyada (Figura 4.2.1.a) con las siguientes características geométricas y del material: Módulo de Young = 30×10^6 , $L = 10$ y $\nu = 0$. Las deflexiones obtenidas se normalizaron.

Se considera una carga distribuida uniforme equivalente a $q = 1$, utilizándose la siguiente fórmula para la normalización de la deflexión: $\bar{w} = -w \times 100 \frac{EI}{qL^4}$. Así, se obtienen los siguientes resultados.

Grafico 4.2.1. Comparación de resultados para una viga simplemente apoyada con una relación $L/H=10$ con la literatura. Fuente Propia

Grafico 4.2.2. Comparación de resultados para una viga simplemente apoyada con una relación $L/H=20$ con la literatura. Fuente Propia

Grafico 4.2.3. Comparación de resultados para una viga simplemente apoyada con una relación $L/H=50$ con la literatura. Fuente Propia

Grafico 4.2.4. Comparación de resultados para una viga simplemente apoyada con una relación $L/H=100$ con la literatura. Fuente Propia

Se observa que la no localidad no tiene influencia alguna en las matrices de rigidez de ambas teorías. Sin embargo, sí tiene efecto en el vector de fuerzas, ya que cada uno de sus componentes se ve alterado por el término de no localidad " μ "; asimismo, se observa que se genera un nuevo componente F_2 en el vector de fuerzas. En resumen, para ambas teorías no locales de análisis, la rigidez se mantiene y las fuerzas actuantes aumentan, por lo cual se espera que las deflexiones en la viga sean mayores.

4.2.2.2 Ejemplo 6

En la presente sección, se realiza un "Benchmarking" comparando la aplicación de no localidad en nuestra teoría propuesta con los resultados obtenidos en la literatura (Eltaher, Khairy, Sadoun, & Omar, 2014) donde se consideró como ejemplo numérico una viga simplemente apoyada, una viga empotrada en ambos de sus extremos y una viga empotrada en un lado y simplemente apoyada en el otro (Figura 4.2.1) con las siguientes características geométricas y del material: Módulo de Young = 70×10^9 , $B=H=1$, $L = 10$ y $\nu=0$. Las deflexiones obtenidas se normalizaron

Se considera una carga distribuida uniforme equivalente a $q = 1$, utilizándose la siguiente fórmula para la normalización de la deflexión: $\bar{w} = -w \times 100 \frac{EI}{qL^4}$. Así, se obtienen los siguientes resultados.

Grafico 4.2.5. Comparación de resultados para una viga empotrada en ambos lados con (Eltaher et al., 2014). Fuente Propia

Grafico 4.2.6. Comparación de resultados para una viga empotrada en un lado y simplemente apoyada en el otro con (Eltaher et al., 2014). Fuente Propia

Grafico 4.2.7. Comparación de resultados para una viga simplemente apoyada (Eltaher et al., 2014). Fuente Propia

Para una mejor explicación de las gráficas mostradas anteriormente, se elaboraron tablas comparativas de nuestros resultados numéricos con los obtenidos por Eltaher et al. (2014)

Tabla 4.2.1. Deflexiones centrales en una viga bi-empotrada.

μ	Eltaher et.al (2014)	Present	Error
0	0.2941	0.2854	2.96%
1	0.2941	0.2854	2.96%
2	0.2941	0.2854	2.96%
3	0.2941	0.2854	2.96%
4	0.2941	0.2854	2.96%
5	0.2941	0.2854	2.96%

Tabla 4.2.2. Deflexiones centrales en una viga empotrada en un extremo y simplemente apoyada en el otro.

μ	Eltaher et.al (2014)	Present	Error
0	0.5803	0.5697	1.83%
1	0.6162	0.6054	1.75%
2	0.6523	0.6418	1.61%
3	0.6885	0.6781	1.51%
4	0.7249	0.7144	1.45%
5	0.7614	0.7507	1.41%

Tabla 4.2.3. Deflexiones centrales en una viga simplemente apoyada

μ	Eltaher et.al (2014)	Present	Error
0	1.3357	1.3271	0.64%
1	1.4607	1.4521	0.59%
2	1.5857	1.5771	0.54%
3	1.7107	1.7021	0.50%
4	1.8357	1.8271	0.47%
5	1.9607	1.9521	0.44%

El porcentaje de error manifestado numéricamente en cada una de las tablas se debe a que Eltaher et al. (2014) aproxima la fuerza distribuida transversal mediante series de Fourier, lo cual influye de manera poco significativa en sus resultados. Por otra parte, se observa que el porcentaje de error obtenido en cada ejemplo numérico está directamente relacionado con las condiciones de borde correspondiente a cada ejemplo. La Tabla 4.2.1 muestra que, si bien el efecto de no localidad no tiene efecto en la deflexión, la diferencia entre nuestros resultados y los obtenidos por Eltaher et al. (2014) difieren en un 2.96%. Este error disminuye conforme las condiciones de borde son más flexibles, tal y como se

puede apreciar en las Tablas 4.2.2 y 4.2.3 en las cuales se observan porcentajes variables para cada valor de “ μ ” y para cada ejemplo numérico, demostrando que el efecto de no localidad se hace más notorio mientras las condiciones de borde no restrinjan por completo los desplazamientos en los apoyos.

4.2.3 Otros Resultados

En esta sección se analizan tres ejemplos numéricos de “ EI ” constante ($E=30 \times 10^6$), $B=30$, $H=15$, $L = 300$ y carga distribuida $q_0 = 10$. Asimismo, se considerará un módulo de Poisson “ ν ” igual a 0.30; sin embargo, su efecto en la configuración deformada de la viga se analizará por separado. Finalmente, para cada tramo de viga, se utilizarán 10 elementos con un polinomio de interpolación de grado $P = 4$.

Figura 4.2.2. Casos de análisis con diferentes condiciones de borde. a) Viga cantiléver, b) Viga continua de dos tramos y c) Viga empotrada-simplemente apoyada

4.2.3.1 Ejemplo 7: Viga Cantiléver bajo carga distribuida uniforme

El primer ejemplo numérico corresponde a una viga cantiléver bajo carga distribuida uniforme (Figura 4.2.2a). La deflexión máxima para este tipo de vigas, de acuerdo al análisis clásico de vigas, es de $w(L) = q_0 L^4 / 8EI$. Considerando las características geométricas y del material detalladas previamente, esta deflexión es equivalente a 0.04. Los resultados fueron obtenidos para valores de “ μ ” desde 0 (local) hasta 5. Asimismo, se presentan resultados diferenciados debido al efecto de Poisson.

Tabla 4.2.4. Máximas deflexiones en el extremo libre de la viga sin considerar efecto de Poisson.

μ	<i>Timoshenko</i> <i>N41 (DOF122)</i>	<i>IFSDT</i> <i>N41 (DOF202)</i>
0	0.40080	0.40080
1	0.40078	0.40078
2	0.40076	0.40076
3	0.40075	0.40075
4	0.40073	0.40073
5	0.40071	0.40071

Fuente: Elaboración Propia

Tabla 4.2.5. Máximas deflexiones en el extremo libre de la viga con un valor de $\nu = 0.30$.

μ	<i>Timoshenko</i>	<i>IFSDT</i>
	<i>N41 (DOF122)</i>	<i>N41 (DOF202)</i>
0	0.29818	0.36388
1	0.29817	0.36386
2	0.29816	0.36385
3	0.29814	0.36383
4	0.29813	0.36381
5	0.29812	0.36380

Fuente: Elaboración Propia

Como se aprecia en la Tabla 4.2.4, las deflexiones máximas son iguales para ambas teorías son iguales. Asimismo, se aprecia que, a medida que el parámetro de no localidad se incrementa, las deflexiones decrecen. Ello podría traducirse en una rigidización del elemento debido a las condiciones de borde en el extremo empotrado de la viga, observación realizada por Reddy y El-Borgi (2014). Por otra parte, en la Tabla 4.2.5, se aprecia diferencias en las deflexiones obtenidas por ambas teorías debido a la inclusión del efecto de Poisson, el cual altera las relaciones constitutivas del material, provocando que el Módulo de Young se incremente, para un valor de $\nu = 0.30$, en un 34.6% (Reddy y El-Borgi, 2014), lo cual se traduce en un incremento de la rigidez en el mismo porcentaje y en menores deflexiones dependiendo del campo de desplazamientos establecido para cada teoría de vigas.

4.2.3.2 Ejemplo 8: Viga simplemente apoyada de dos tramos sometida a carga distribuida uniforme

El segundo ejemplo corresponde a una viga simplemente apoyada de dos tramos de igual longitud (Figura 5.4.1.b). Las tablas 4.2.6 y 4.2.7 muestran que, debido a las condiciones de borde del problema (Reddy y El-Borgi, 2014), el efecto de no localidad contribuye a una flexibilización del elemento y, por consiguiente, un incremento en las deflexiones a medida que se incrementa el valor de “ μ ”.

Tabla 4.2.6. Deflexiones centrales de cada tramo de viga sin considerar efecto de Poisson

μ	<i>Timoshenko</i>		<i>IFSDT</i>	
	<i>N21 (DOF62)</i>	<i>N61(DOF182)</i>	<i>N21 (DOF102)</i>	<i>N61(DOF302)</i>
0	0.00110099	0.00110099	0.00110099	0.00110099
1	0.00110127	0.00110127	0.00110127	0.00110127
2	0.00110155	0.00110155	0.00110155	0.00110155
3	0.00110183	0.00110183	0.00110183	0.00110183
4	0.00110212	0.00110212	0.00110212	0.00110212
5	0.00110240	0.00110240	0.00110240	0.00110240

Fuente: Elaboración Propia

Tabla 4.2.7: Deflexiones centrales de cada tramo de viga considerando un valor de $\nu = 0.30$.

μ	<i>Timoshenko</i>		<i>IFSDT</i>	
	<i>N21 (DOF62)</i>	<i>N61(DOF182)</i>	<i>N21 (DOF102)</i>	<i>N61(DOF302)</i>
0	0.0008509	0.0008509	0.0010250	0.0010250
1	0.0008511	0.0008511	0.0010253	0.0010253
2	0.0008513	0.0008513	0.0010255	0.0010255
3	0.0008515	0.0008515	0.0010258	0.0010258
4	0.0008517	0.0008517	0.0010260	0.0010260
5	0.0008519	0.0008519	0.0010263	0.0010263

Fuente: Elaboración Propia

Asimismo, una vez más se aprecia el efecto de Poisson en las deflexiones máximas de cada tramo, siendo estas de igual valor para ambas teorías y para un parámetro no local específico en caso de asumir $\nu = 0$ (Tabla 4.2.6). Por otra parte, tal y como sucedió en el ejemplo numérico anterior, se aprecia menores y diferentes deflexiones para ambas teorías y para un valor específico de μ en caso se adopte el valor de $\nu = 0.30$, debido a la gran influencia de este parámetro en la rigidez del elemento.

Gráfico 4.2.8. Parámetro no-local VS Deflexión central. Fuente Propia

4.2.3.3 Ejemplo 9: Viga Empotrada-Simplemente apoyada.

El tercer y último ejemplo de esta sección corresponde al análisis de deflexiones de una viga empotrada en uno de sus extremos y con un apoyo fijo en su centro de luz. Se consideró este modelo matemático ya que contempla las dos condiciones de borde de los dos ejemplos numéricos anteriores (empotramiento y apoyo fijo); la finalidad es analizar si las deflexiones obedecen a la influencia predominante de alguna condición de borde a medida que se incrementa el parámetro no-local " μ ". Se espera que las deflexiones se reduzcan con cada valor incremental de dicho parámetro, ya que la condición de borde

dominante es el empotramiento, del cual depende la estabilidad del modelo. Asimismo, se analizará lo que ocurre cuando el efecto de Poisson es incluido ($\nu = 0.30$)

A continuación, se muestran las siguientes tablas que contienen los resultados del presente modelo matemático.

Tabla 4.2.8. Deflexión en el centro del primer tramo y en el extremo libre del elemento cuando $\nu = 0$

μ	Central Deflection		End Deflection	
	<i>TBT (N21-DOF62)</i>	<i>IFSDT (N21-DOF102)</i>	<i>TBT (N81-DOF242)</i>	<i>IFSDT (N81-DOF402)</i>
0	0.002079929	0.002079929	-0.046406097	-0.046406097
1	0.002079646	0.002079646	-0.04639939	-0.04639939
2	0.002079363	0.002079363	-0.046392684	-0.046392684
3	0.002079081	0.002079081	-0.046385977	-0.046385977
4	0.002078798	0.002078798	-0.046379271	-0.046379271
5	0.002078515	0.002078515	-0.046372565	-0.046372565

Fuente: Elaboración Propia

Tabla 4.2.9. Deflexión en el centro del primer tramo y en el extremo libre del elemento cuando $\nu = 0.30$

μ	Central Deflection		End Deflection	
	<i>TBT (N21-DOF62)</i>	<i>IFSDT (N21-DOF102)</i>	<i>TBT (N81-DOF242)</i>	<i>IFSDT (N81-DOF402)</i>
0	0.001542923	0.001888023	-0.034790053	-0.042443226
1	0.001542711	0.001887765	-0.03478505	-0.042437109
2	0.001542498	0.001887506	-0.034780046	-0.042430992
3	0.001542285	0.001887247	-0.034775042	-0.042424875
4	0.001542072	0.001886989	-0.034770038	-0.042418759
5	0.001541859	0.00188673	-0.034765034	-0.042412642

Fuente: Elaboración Propia

Tal y como se esperaba, en ambas tablas de resultados se observa una clara influencia de la condición de borde de empotramiento, ya que los valores de las deflexiones encontradas disminuyen con cada incremento de “ μ ”. Además, se observa que, al no incluir efecto de Poisson, las deflexiones son las mismas para ambas teorías abordadas en la presente investigación (Timoshenko e IFSDT).

Por otra parte, al incluir Poisson ($\nu = 0.30$), se manifiesta una diferenciación entre las deflexiones correspondientes a ambas teorías de análisis, además de provocar que el

elemento se rigidice y que las deflexiones sean menores; sin embargo, el efecto del incremento de " μ " persiste.

5. PLANTEAMIENTO ACADÉMICO

“[...] engineering is a “problem-solving discipline” that requires an understanding of the basic principles/axioms of nature and their role in formulating the underlying mathematical models.” (Texas A&M University, <https://mechanics.tamu.edu/courses/teaching-philosophy/>)

La ingeniería es una disciplina dedicada a la resolución de problemas y para ello se requiere un conocimiento y entendimiento básico de los principios/axiomas de la naturaleza y su rol en formular modelos matemáticos fundamentales.

El planteamiento académico a realizar constará de las siguientes partes: composición de temas básica y futuras líneas de investigación.

5.1 Temática básica

Tomando como ejemplo los cursos de elementos finitos de la Universidad de Texas A&M (Reddy, n.d.), se propone separar en 3 partes los temas básicos para el entendimiento del método de los elementos finitos aplicados en vigas con teorías no locales.

Mecánica del Continuo	Energía y métodos variacionales	Método de los elementos finitos
1. Introducción 2. Vectores y tensores 3. Cinemática 4. Esfuerzos 5. Conservación de la masa y momento lineal 6. Balance de energía 7. Mecánica de sólidos	8. Vectores y tensores 9. Cinemática, cinética, balance de momento lineal y teoría de vigas 10. Trabajo Virtual, Energía y cálculo variacional 11. Introducción al método de los elementos finitos. 12. Teorías No Locales	13. Problemas 1D de ecuaciones de segundo orden 14. Vigas Euler-Bernoulli y Timoshenko 15. Armaduras 2D y elementos “Frame” 16. Eigen Valores 17. Integración Numérica 18. Estado Plano de esfuerzos 19. Consideraciones generales de un modelo

5.2 Futuras Líneas de Investigación

A partir de la presente tesis, diversas líneas de investigación pueden surgir en el campo de la mecánica estructural. Las principales adiciones que se ha podido rescatar a esta investigación son las siguientes:

1. **Modelo de vigas no rectangulares:** Otra propuesta de investigación sería la implementación de un modelo utilizando las mismas teorías de vigas y las ecuaciones constitutivas no locales incluyendo una variación en la dimensión y forma de la sección. Esta variación incurriría a partir del cálculo de los esfuerzos resultantes, que dependiendo de la sección a utilizar cambiarían dado que se tendría una integral en el peralte, una sumatoria y/o un cambio de coordenadas naturales u ortogonales a coordenadas polares o hasta esféricas.
2. **Modelo Funcionalmente Graduado:** Como segunda propuesta de una futura línea de investigación, existe la posibilidad de implementar el comportamiento con un material funcionalmente graduado. Así como en el caso de las vigas no rectangulares, el principal efecto de este material sería en el cálculo de los esfuerzos resultantes, dado que existirían términos que no se eliminan dado que se tendría una integral del material (del módulo de elasticidad) en el peralte.
3. **Modelo no lineal:** Dentro de una variación de un modelo lineal a un modelo no lineal, se tendría que definir dentro del tensor de deformaciones qué términos no lineales se van a utilizar y si se hará una no linealidad completa o una no linealidad parcial como el caso de las teorías de Von Karman. A partir de ello, la creación del modelo en elementos finitos se volvería más complejo, dado que se tendría que calcular la matriz tangente y para su resolución se debería iterar por pasos de carga.
4. **Modelos de agrietamiento o Mecánica de fracturas:** Dentro de esta línea de investigación existen muchos casos de estudio entre el comportamiento no local y el agrietamiento, siendo una futura contribución la implementación de Teorías no locales con la teoría de vigas IFSDT.
5. **Modelos 2D y 3D:** Dentro de esta línea de investigación, se haría el cambio desde el principio, al definir los campos desplazamientos y tomando otro en el que se considere desplazamientos transversales y su interacción de esfuerzo-deformación.
6. **Modelos dinámicos:** Implicaría la introducción del efecto del tiempo dentro de la estructura, utilizando las teorías de vigas presentes en la investigación.

CONCLUSIONES

- A partir de los parámetros establecidos para una teoría no local lineal, se puede apreciar que los términos no locales aparecen en el vector de fuerzas e implica una variación al valor de dichas fuerzas distribuidas. Sin embargo esto implica que esta teoría no local no tiene efecto sobre cargas puntuales.
- Para la implementación computacional es necesario el uso de herramientas como la integración numérica, la cual su exactitud depende del número de aproximaciones a utilizar. Para este caso se decidió utilizar $P+1$ puntos de integración Gaussiana, siendo P el polinomio de interpolación propuesto para el análisis. Este criterio asegura una buena aproximación a la integral exacta.
- Para el análisis de nano vigas (bastante utilizadas en la literatura como benchmarks para casos no locales) puede surgir problemas numéricos dado que los valores de los desplazamientos son más cercanos a 0 y sus componentes de rigidez son de alto orden, por lo que la resolución se acerca a una matriz singular.
- La utilización de más elementos y funciones de interpolación de alto grado permiten una aproximación más real, sin embargo, el costo computacional es mayor, dado que se tienen que hacer más iteraciones y resolver problemas matemáticos más complejos a través de métodos numéricos.
- La Teoría IFSDT es una expansión de la Teoría de Timoshenko; dicha expansión se manifiesta en el campo de desplazamientos en la sección transversal, ya que a diferencia de Timoshenko, la Teoría IFSDT considera que los esfuerzos por corte que ocurren en la sección transversal presentan distribución parabólica en el eje de la sección, permitiendo así una mayor aproximación en los resultados. Asimismo, permite el uso de las relaciones constitutivas en 3D y no simplemente un estado plano de esfuerzos.
- La Teoría Propuesta IFSDT es un método mucho más exacto debido a que se consideran cinco grados de libertad por nodo en comparación con la Teoría de Timoshenko que solo tiene 3 grados de libertad por nodo. Los giros en la sección transversal y de la teoría propuesta provoca que la configuración deformada sea mucho más pronunciada, lo cual se traduce en resultados cada vez más exactos a la realidad.
- Mediante la aplicación de teorías no locales, se observan que las deflexiones aumentan en los casos Timoshenko e IFSDT; ello es debido a que cada uno de los

componentes del vector de fuerzas se ve alterado por el término de no localidad “ μ ”.

- Cuando se tiene un módulo de Poisson nulo, las teorías de vigas de Timoshenko e IFSDT son virtualmente las mismas.
- Para la Teoría de Timoshenko, se evita el shear locking incrementando el grado de polinomio de interpolación, de manera que se pueda considerar adecuadamente los efectos de desplazamiento transversal w y giro ϕ_I .
- A partir de la investigación desarrollada se puede dar una mejor comprensión acerca de cómo afrontar un problema de mecánica del continuo a través del método de los elementos finitos. Asimismo, se puede implementar diversos campos ligados a la presente investigación como es el caso del uso de materiales funcionalmente graduados o la implementación de la no linealidad geométrica, entre otros.

RECOMENDACIONES

- Definir correctamente el sistema de unidades a trabajar dado que puede haber problemas en el cálculo numérico por la diferencia de orden en el sistema de unidades establecidos.
- Incrementar el grado del polinomio de interpolación de manera que se pueda evitar el “salto por corte” (shear locking).
- Verificar que la matriz de rigidez de la estructura sea simétrica ($K = K^T$) y no singular, ya que de ocurrir esto último, la determinante de dicha matriz es nula, imposibilitando el desarrollo del modelo.
- El presente estudio aborda el análisis de, únicamente, elementos unidimensionales (vigas). Se propone el análisis de estructuras más complejas como placas y cáscaras (elementos bidimensionales) y sólidos de revolución (elementos tridimensionales).
- Considerar efectos de esbeltez ($L/H > 1$) en los resultados.
- En caso de vigas con condiciones de borde que implique restricción total de desplazamiento (empotramiento), es válido no considerar efectos de no-localidad.
- Tener en cuenta el efecto de Poisson en la rigidez a flexión de la viga.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Alshorbagy, A. E., Eltaher, M. A., & Mahmoud, F. F. (2013). Static analysis of nanobeams using nonlocal FEM †, 27(7), 2035–2041. <https://doi.org/10.1007/s12206-013-0212-x>
- Arciniega, R. A. (2005). On a tensor-based finite element model for the analysis of shell structures. *Doctor of Philosophy, Texas A and M University*, (December). Retrieved from <http://scholar.google.com/scholar?hl=en&btnG=Search&q=intitle:ON+A+TENSO+R-BASED+FINITE+ELEMENT+MODEL+FOR+THE+ANALYSIS+OF+SHELL+STRUCTURES#0>
- Bauchau, O. A., & Craig, J. I. (2009). *Structural Analysis: With Applications to Aerospace Structures*. Atlanta: Springer. <https://doi.org/10.1007/978-90-481-2516-6>
- Bucciarelli, L. L. (2009). *Engineering Mechanics for Structures*. Dover Books on Engineering.
- C .M Wang; J. N Reddy; K .H Lee. (2000). *Shear deformable beams and plates : relationships with classical solutions*. Elsevier.
- Carrera, E., Zappino, E., & Li, G. (2018). Finite element models with node-dependent kinematics for the analysis of composite beam structures. *Composites Part B: Engineering*, 132, 35–48. <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2017.08.008>
- Chapra, S. C., & Canale, R. P. (2007). *Métodos Numéricos Para Ingenieros. Métodos Numéricos Para Ingenieros*.
- Eltaher, M. A., Khairy, A., Sadoun, A. M., & Omar, F. (2014). Static and buckling analysis of functionally graded Timoshenko nanobeams. *APPLIED MATHEMATICS AND COMPUTATION*, 229, 283–295. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2013.12.072>

- Eringen, A. (2003). *Nonlocal Continuum Field Theories. Applied Mechanics Reviews* (Vol. 56). <https://doi.org/10.1115/1.1553434>
- Failla, G., Sofi, A., & Zingales, M. (2015). A new displacement-based framework for non-local Timoshenko beams. *Meccanica*, 50(8), 2103–2122. <https://doi.org/10.1007/s11012-015-0141-0>
- J.N. Reddy. (2003). Mechanics of laminated composite plates and shells: theory and analysis. <https://doi.org/10.1007/978-1-4471-0095-9>
- J.N. Reddy. (2005). *An Introduction to the Finite-Element Method* (3rd ed., Vol. 1). McGraw-Hill Education. <https://doi.org/10.1002/0471777447.ch16>
- Jirásek, M. (2004). Nonlocal theories in continuum mechanics. *Acta Polytechnica, Czech Technical University in Prague*, 44(5), 16–34. <https://doi.org/10.14311/610>
- Karličić, D., Murmu, T., Adhikari, S., & McCarthy, M. (2015). *Introduction to Non-Local Elasticity. Non-Local Structural Mechanics*. <https://doi.org/10.1002/9781118572030.ch1>
- Kassimali, A. (2010). *Structural Analysis* (Fourth). Michigan: Cengage. <https://doi.org/10.1002/9781405164535.ch35>
- Kassimali, A. (2011). *Matrix Analysis of Structures. SI Edition*.
- Khodabakhshi, P., & Reddy, J. N. (2017). A unified beam theory with strain gradient effect and the von Kármán nonlinearity. *ZAMM Zeitschrift Fur Angewandte Mathematik Und Mechanik*, 97(1), 70–91. <https://doi.org/10.1002/zamm.201600021>
- Mahdi Ghannadpour, A. S. (2018). Ritz Method Application to Bending , Buckling and Vibration Analyses of Timoshenko Beams via Nonlocal Elasticity, 4(1), 16–26. <https://doi.org/10.22055/JACM.2017.21915.1120>
- Mase, G. T., & Mase, G. E. (1999). *Continuum Mechanics for Engineers* (Second). Michigan.
- Ochoa, O. O., & Reddy, J. N. (1992). Finite element analysis of composite laminates.

Booksgooglecom. <https://doi.org/10.1007/978-94-015-7995-7>

Olivella, X., & Agelet de Saracibar, C. (2002). *Mecánica de medios continuos para ingenieros*, 329.

Preethi, K., Rajagopal, A., & Reddy, J. N. (2015). Surface and non-local effects for non-linear analysis of Timoshenko beams. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 76(September), 100–111. <https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2015.06.006>

Reddy, J. . (n.d.). Texas A&M University, Advanced Computational Mechanics Laboratory: Educational Materials and Opportunities. Retrieved May 20, 2019, from <https://mechanics.tamu.edu/courses/educational-tools-and-materials/>

Reddy, J. . (1993). *An Introduction to the Finite Element Method* (2nd ed., Vol. 50). McGraw-Hill. <https://doi.org/10.2307/2007936>

Reddy, J. . (2002). *Energy Principles and Variational Methods in Applied Mechanics*. New York.: John Wiley & Sons.

Reddy, J. . (2010). *Principles of Continuum Mechanics: A Study of Conservation Principles with Applications*. Texas: Cambridge University Press.

Reddy, J. ., & Wang, C. M. (2014). *Dynamics Of Fluidconveying Beams*, (May).

Reddy, J. N. (2004). *An Introduction to Nonlinear Finite Element Analysis* (Vol. 136).

Reddy, J. N. (2007). Nonlocal theories for bending, buckling and vibration of beams. *International Journal of Engineering Science*, 45(2–8), 288–307. <https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2007.04.004>

Reddy, J. N. (2008). *An introduction to continuum mechanics: with application*. Texas: Cambridge University Press.

Reddy, J. N. (2010). Nonlocal nonlinear formulations for bending of classical and shear deformation theories of beams and plates. *International Journal of Engineering Science*, 48(11), 1507–1518. <https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2010.09.020>

Reddy, J. N., & Arciniega, R. A. (2004). Shear deformation plate and shell theories: From Stavsky to present. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 11(6 II), 535–582. <https://doi.org/10.1080/15376490490452777>

Schulz, M., & Asce, M. (2018). Beam Element with a 3D Response for Shear Effects. *J. Eng. Mech. (ASCE)*, 144(1), 1–17. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)EM.1943-7889.0001366](https://doi.org/10.1061/(ASCE)EM.1943-7889.0001366).

ANEXOS

ANEXO 1: Diagrama de flujo