UNIVERSIDAD PERUANA DE CIENCIAS APLICADAS

FACULTAD DE INGENIERÍA

PROGRAMA ACADÉMICO DE INGENIERÍA CIVIL

**Análisis no lineal elástico en vigas de concreto a través del Modelo Fijo de
Grietas Dispersas**

TESIS

Para optar el título profesional de Ingeniero Civil

AUTORES

Arias Palomino, Christopher (0000-0002-7948-4495)

Betancourt Irusta, Karl Nils (0000-0002-2187-0625)

ASESORES

Arana Vázquez, Victor Ernesto (0000-0003-4838-451X)

Duran Cárdenas, Freddy Remigio (0000-0002-2578-891X)

Lima, viernes 24 de enero de 2020

DEDICATORIA

A nuestros padres, por todo el apoyo brindando durante esta etapa universitaria .

AGRADECIMIENTOS

Agradecemos al director de la Carrera de Ingeniería Civil de la UPC, PhD Roman Arciniega, por invitarnos a investigar sobre un tema retador y por habernos acompañado durante este proceso de investigación.

Agradecemos al PhD Freddy Duran por habernos permitido descubrir esta área de la Ingeniería Civil y brindarnos las bases para desarrollar esta tesis.

Agradecemos al MsC Victor Arana por habernos guiado, sobre todo en los momentos más difíciles de esta investigación.

RESUMEN

El presente estudio trata sobre el análisis del agrietamiento en vigas de concreto sujetas a cargas monotónicas a través de un cálculo pseudo-estático. El fundamento teórico se basa en el Método de Grietas Dispersas (Smearred Crack Approach) de la Mecánica de Fractura, el cual será evaluado dentro de un algoritmo de análisis considerando el Método de Elementos Finitos. El objetivo principal es proponer un modelo computacional para el cálculo de deflexiones instantaneas y la modelación del agrietamiento en vigas de concreto armado sometidas a cargas de servicio. Con este propósito, se evaluaron las vigas analizadas por diversos autores. Los resultados del estudio se presentan mediante curvas fuerza-desplazamiento, la secuencia de propagación del agrietamiento y la evaluación de la resistencia última. Se consideró un modelo frágil de esfuerzo y deformación en la grieta. De esta manera, para los elementos analizados, se demostró que el modelo utilizado es capaz de predecir adecuadamente el proceso de agrietamiento y de calcular las deflexiones instantáneas en vigas de concreto, teniendo en cuenta resultados experimentales existentes.

Palabras clave: Agrietamiento; Concreto; Método de Elementos Finitos; Método de Grietas Dispersas.

Nonlinear Elastic Analysis of concrete beams by the Fixed Smeared Crack Approach

ABSTRACT

The present study deals with cracking analysis of concrete beams under monotonic loadings by means of a quasi-static evaluation. The theoretical basis herein used is lies on the Fixed Smeared Crack Approach taking into account Fracture Mechanics within a Finite Element algorithm for the numerical solution of the problem. The main objective is to propose a computational model for the calculus of instantaneous deflection and the simulation of cracking in concrete beams under service loadings. On this purpose, diverse beams evaluated by may authors where analyzed. The results of this study cases are presented through and force-displacement curves, cracking propagation and the evaluation of the ultimate resistance of the beam. Within the computational algorithm, a fragile crack stress-strain relation was implemented. On this way, for the analyzed elements it was demonstrated that the model herein used can predict adequately cracking processes and instantaneous deflections of concrete beams considering existing experimental results.

Keywords: Cracking, Concrete, Finite Element Method, Fixed Smeared Crack Approach.

ÍNDICE

1	INTRODUCCIÓN.....	1
1.1	ANTECEDENTES	1
1.2	REALIDAD PROBLEMÁTICA	3
1.3	FORMULACIÓN DEL PROBLEMA	5
1.4	OBJETIVO GENERAL	5
1.5	OBJETIVOS ESPECÍFICOS	5
2	METODOLOGÍA.....	6
2.1	RECOLECCIÓN DE INFORMACIÓN	6
2.2	DESARROLLO DEL CÓDIGO.....	6
2.3	DISCUSIÓN DE RESULTADOS	6
3	MARCO TEORICO.....	7
3.1	MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS	7
3.1.1	Introducción al método de elementos finitos.....	7
3.1.2	Desarrollo de ecuaciones fundamentales.....	7
3.1.3	Formulación débil de Galerkin	9
3.2	MECÁNICA DE FRACTURAS	11
3.2.1	Introducción a la mecánica de fracturas	11
3.2.2	Enfoque fijo de grietas dispersas	12
3.2.3	Modelos constitutivos de tensión en la grieta.....	18
3.2.4	Modelo constitutivo del acero	20
3.3	ANÁLISIS CLÁSICO DE AGRIETAMIENTO.....	21
3.3.1	Momentos de inercia efectivo.....	21
4	DESARROLLO MATEMÁTICO	23
4.1	FORMULACIÓN ELÁSTICO LINEAL	23
4.1.1	Ecuaciones fundamentales.....	23
4.1.2	Formulación débil de Galerkin	24
4.2	INTEGRACIÓN NUMÉRICA.....	26
4.3	FORMULACIÓN NO-LINEAL ELÁSTICA DEL MODELO FIJO DE GRIETAS DISPERSAS ..	28

4.3.1	No-linealidad del material	28
4.3.2	Algoritmo de Newton-Rhapson.....	29
4.3.3	Inestabilidad numérica.....	31
5	IMPLEMENTACIÓN NUMÉRICA	33
5.1	CÓDIGO PSEUDO-ESTÁTICO.....	33
6	DISCUSIÓN DE RESULTADOS.....	37
6.1	VIGA DE CONCRETO NO REFORZADO.....	37
6.2	VIGA DE CONCRETO REFORZADO	40
6.3	VIGAS DE CONCRETO CON Y SIN REFUERZO SUJETAS A CARGAS DE SERVICIO	44
7	CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES	47
7.1	CONCLUSIONES	47
7.2	RECOMENDACIONES	48
8	BIBLIOGRAFÍA	49
	ANEXOS	54

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1: Recomendaciones para el dimensionamiento de los subelementos para el análisis no-lineal de estructuras de concreto (Rijkswaterstaat Ministry of Infrastructure and the Environment, 2017)	35
Tabla 2: Parámetros de ensayos. Elaboración propia	45
Tabla 3: Comparativo de resultados. Elaboración propia.....	46

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1: Análisis no lineal de un Puente en arco, por Červenka Consulting (2019).	2
Figura 2: Estado de esfuerzos en un elemento diferencial. Elaboración propia.....	7
Figura 3: Esfuerzos locales en la grieta. Elaboración propia	13
Figura 4: Modos de fractura. Elaboración propia.....	16
Figura 5: Modelo constitutivo a tracción frágil del concreto. Elaboración propia.....	18
Figura 6: Diagrama lineal tensión-deformación en la grieta. Elaboración propia.....	19
Figura 7. Curvas combinadas de tensión normal y de corte elástica y en la grieta. Elaboración propia.....	19
Figura 8: Efecto de las grietas en vigas , por McCormac & Brown (2011)	21
Figura 9: Tipos de cuadratura Gauss-Lengedre. Elaboración propia	27
Figura 10: Forma gráfica del Método de Newton-Raphson. Adaptado de “The Newton- Raphson scheme. A case of convergence.” (Reddy, 2016)	31
Figura 11. Viga evaluada para el análisis. (Rots, 1988).....	37
Figura 12: viga con muesca, estado deformado al cuarto paso de carga. Elaboración propia	38
Figura 13: Paso de máxima capacidad de carga. Elaboración propia	38
Figura 14: Estado final del objeto de estudio. Elaboración propia.....	38
Figura 15: Progresión de la falla y curva de fuerza vs desplazamiento. Elaboración propia	39
Figura 16: Curvas fuerza vs deflexión. Elaboración propia	39
Figura 17. Enmallado planteado. Elaboración propia	40
Figura 18: Curva fuerza deflexión en parte central. Elaboración propia.....	41
Figura 19: Diagrama del sistema agrietado ante la aparición de la primera grieta. Elaboración propia.....	42
Figura 20: Diagrama del sistema agrietado en su límite lineal. Elaboración propia	42
Figura 21: Diagrama del sistema agrietado en su estado último. Elaboración propia.....	42
Figura 22: Diagrama del sistema agrietado ante la aparición de la primera grieta. Elaboración propia.....	43
Figura 23: Diagrama del sistema agrietado en su límite lineal. Elaboración propia	43

Figura 24: Diagrama del sistema agrietado en su estado último. Elaboración propia.....	43
Figura 25: Viga SB-3 agrietada en su estado último de carga. Elaboración propia.....	45
Figura 26: Porcentaje de error absoluto de cálculo de deflexiones. Elaboración propia.....	45

1 INTRODUCCIÓN

1.1 Antecedentes

Durante la vida útil de las estructuras de concreto, estas son afectadas por la aparición de grietas que afectan su comportamiento. Cuando el desarrollo de microgrietas deriva en importantes zonas de falla, el uso de modelos elástico-lineales para el análisis estructural, incluso a través de las teorías de la Mecánica de Fractura, es insuficiente (American Concrete Institute, Committee 446.1R-91, 1992). Ante la formación de grietas, la capacidad a tracción del concreto decae, desarrolla un comportamiento anisotrópico y su rigidez disminuye (Edalat-Behbahani, Barros, & Ventura-Gouveia, 2017). Por este motivo, es necesario describir la degradación del material, a través de la matriz de rigidez del sistema en análisis, mediante modelos constitutivos; ya sea a través de relaciones entre el esfuerzo y el desplazamiento en la zona de falla o mediante relaciones esfuerzo-deformación en el área en la que se forman micro-fisuras. Así, se distinguen dos tipos de análisis mediante la Mecánica de Fractura: el primero para materiales dúctiles como el acero y el segundo para materiales frágiles o pseudo-frágiles como el concreto (American Concrete Institute, Committee 446.1R-91, 1992).

En materiales compuestos como el concreto, conformados por una matriz que mantiene unidos los agregados, la falla por tensión comprende la aparición de microgrietas que convergen en la formación de grietas (Blaauwendraad & Rots, 1989). Por este motivo, es válido afirmar que el agrietamiento no se da en una línea definida, sino en una zona conformada por varias discontinuidades en el material. Ante ello se propuso inicialmente el análisis de elementos de concreto armado mediante un modelo frágil para incorporar un comportamiento que involucre una relación entre la deformación de los elementos y la degradación del material (Rashid, 1968). Años después, se consideró necesaria la evaluación de la degradación del concreto mediante reducciones graduales de su capacidad (Scanlon, 1971), i.e. generando una reducción en el esfuerzo que resiste el concreto mientras su deformación aumenta (Hillerborg, Modéer, & Petersson, 1985; Bažant & Oh, 1983).

El primer enfoque del Modelo de Grietas Dispersas para la simulación del agrietamiento fue propuesto por Bažant & Oh (1983). En este hacen referencia a la Teoría del Ancho de Banda de Agrietamiento propuesta por Bažant (1976), como se citó en American Concrete Institute, Committee 446.1R-91 (1992), la cual plantea que el

comportamiento del material agrietado se puede evaluar en un ancho de banda, de forma distribuida en una zona específica del elemento fracturado, mediante una relación constitutiva entre la deformación normal a dicha grieta y la degradación de la rigidez. Adicionalmente, el autor propuso un ancho fijo en el cual podría desarrollarse dicho deterioro del material. Además, el enfoque propuesto por Bažant & Oh (1983) evalúa la formación de grietas en la dirección normal a los esfuerzos principales durante todo el proceso de falla. Con respecto a esta aproximación al análisis del agrietamiento, Blaauwendraad & Rots (1989) afirmaron que este enfoque permite predecir la degradación de la rigidez de los elementos de forma apropiada.

Con respecto a los programas en el mercado para la simulación de la fractura se conocen entre los principales a ABAQUS (2019), ADINA (2019), ATENA (2019), DIANA FEA (2019), OpenSees (2006), VECTOR (2019) y ZEUS-NL (2013). Entre ellos, ABAQUS (2019), ADINA (2019) y DIANA (2019) tienen costo, mientras que ATENA (2019), OpenSees (2006), VECTOR (2019) y ZEUS-NL (2013) son de libre uso.

Actualmente, se emplean estos softwares para el análisis no lineal de estructuras. Por ejemplo, ATENA (2019), el cual fue empleado para el análisis de un puente en arco construido con masonería en la universidad Leipzig, en el que se simuló la falla de dicho puente y se probó la seguridad de este ante diferentes cargas. El resultado de la simulación computacional de la falla del puente fue el siguiente:

Figura 1: Análisis no lineal de un Puente en arco, por Červenka Consulting (2019).

Con respecto a la evaluación de vigas agrietadas, el Committee 435 del American Concrete Institute (2000) recomienda el uso de la metodología propuesta por Branson

(1963). Esta consiste en la evaluación de estructura de las vigas mediante el uso de una inercia efectiva, la cual considera que parte de la sección de la viga ya no es capaz de resistir las fuerzas aplicadas. Esta metodología utiliza los conceptos de la Mecánica Clásica para la evaluación de las deflexiones.

1.2 Realidad problemática

Según Bittencourt, Menin & Trautwein (2009), debido a la baja resistencia a tensión del concreto, las estructuras compuestas por este material se fisuran incluso ante bajos niveles de carga. Este proceso genera un comportamiento no-lineal en el concreto, puesto que ante el agrietamiento la capacidad a tensión y la resistencia al corte entre las caras de la grieta disminuye progresivamente a medida que la discontinuidad se ensancha, se genera un comportamiento anisotrópico, la rigidez del elemento disminuye y se redistribuyen los esfuerzos de forma repentina (Edalat-Behbahani, Barros, & Ventura-Gouveia, 2017). En este sentido, el asumir un comportamiento elástico-lineal genera resultados imprecisos si estos se comparan con la data experimental.

La falla de las estructuras de concreto armado, invariablemente, es el resultado de la formación y propagación de grandes zonas agrietadas antes de que estas alcancen su capacidad última. A pesar ello, la Mecánica de Fractura, una rama de la Mecánica enfocada en el estudio de la formación, propagación y comportamiento de elementos agrietados (American Concrete Institute, Committee 446.3R-97, 1997), no es utilizada para el diseño a pesar de que esta se investiga desde la segunda mitad del Siglo XX (American Concrete Institute, Committee 446.1R-91, 1992). Por otro lado, la Mecánica de Materiales clásica no logra describir el comportamiento del concreto ni simular la aparición de grietas, por lo cual es necesario el incluir en el análisis de estructuras lo planteado por la Mecánica de Fracturas.

Ante este contexto, el Comité 446.1R-91 (1992) plantea cinco razones para aplicar la Mecánica de Fracturas en la Ingeniería Civil. En primer lugar, la formación de grietas requiere de una cantidad necesaria de energía para fracturar un elemento, mientras que el esfuerzo solo determina el momento de iniciación de este proceso. En este sentido, es importante aplicar esta disciplina, pues sí contempla un criterio energético de análisis. En segundo lugar, toda teoría física debe ser objetiva, por lo cual las simplificaciones asumidas deben reducirse al mínimo. Entre ellas, la elección del tamaño y la forma de la

mallas o el modelo esfuerzo deformación del concreto. Por otra parte, la aplicación de modelos que involucran sólo la influencia del esfuerzo admisible y no la energía de fractura da lugar a diseños no objetivos en materiales cuya curva esfuerzo-deformación no presente una meseta de fluencia, como en el caso del concreto el cual es un material pseudo-frágil. En cuarto lugar, la Mecánica de Materiales clásica no brinda información sobre la disipación de energía durante la fractura. En este sentido, la Mecánica de Fracturas permite predecir un comportamiento más acercado a la realidad de los elementos de concreto armado. Por último, siendo esta la razón más importante, permite evaluar la influencia del tamaño del elemento a analizar en los esfuerzos y en el proceso de fractura de este durante los procesos de carga.

Finalmente, ante estas razones, resulta evidente la necesidad de aplicar esta ciencia para el diseño y análisis de estructuras de concreto armado. Por estos motivos, el Comité 446.1R-91 (1992) afirma que la aplicación de esta sería beneficiosa en cuanto al diseño de estructura con márgenes de seguridad más precisos, con respecto a que se diseñaría de forma más precisa resultando en ahorro económico. Por otro lado, agrega que su uso es más relevante en estructuras de gran tamaño como represas, contenedores, torres de enfriamiento nuclear y edificios de gran envergadura, en los cuales se requiere estudios más precisos y seguros.

En cuanto al uso de programas para la simulación de la fractura, los mencionados anteriormente son muy complejos y permiten al usuario resolver un gran número de problemas mecánicos. Estos cuentan con una gran variedad de funciones y aplicaciones, no solamente en el área de la Fractura. Programas como ATENA (2019), OpenSees (2006), VecTor (2019) y ZEUS-NL (2013) son de libre descarga, pero son programas cerrados. Debido a esto, los usuarios no tienen la posibilidad de adaptar el programa para necesidades particulares de estos. En este sentido, un investigador no puede realizar modificaciones en el código fuente con la finalidad de adaptarlo a su propia investigación; el usuario está limitado a la capacidad del programa. Ante esto, se determina que un código simple de fuente abierta permitiría a los estudiantes ahondar en este tópico.

Con respecto a la evaluación de vigas sometidas a cargas de servicio, como fue mencionado previamente, el Comité 435 (2000) recomienda el uso de la metodología propuesta por Branson (1963) para el cálculo de una inercia efectiva que considere la influencia de la sección agrietada por cargas de servicio. Sin embargo, según diferentes

investigaciones realizadas por de Araújo (2005) y Gribniak & Kaklauskas (2014), la metodología propuesta por Branson (1963) es imprecisa para el cómputo de deflexiones instantáneas y que sus resultados son altamente afectados por variaciones en la cuantía de acero de refuerzo y en el ratio de aplicación de carga. Adicionalmente, según Gribniak & Kaklauskas (2014), los resultados son más variables a medida que las vigas desarrollan grietas. Por otro lado, cabe mencionar que dicha metodología asume que toda una sección de la viga ya se ha agrietado y realiza el cómputo de deflexiones y fuerzas a partir de esta hipótesis. Sin embargo, la realidad indica que el agrietamiento es un fenómeno progresivo, el cual debilita la sección a medida que las grietas se van expandiendo, alargando y ensanchando (Edalat-Behbahani, et al.,2017); i.e. no generan una pérdida inmediata de capacidad como asume la metodología planteada por Branson (1963).

1.3 Formulación del Problema

¿Cómo simular y analizar el comportamiento de vigas de concreto ante cargas monotónicas mediante la formulación de un código numérico?

1.4 Objetivo General

Proponer un modelo computacional para el cálculo de deflexiones instantáneas y la modelación del agrietamiento en vigas de concreto armado sometidas a cargas de servicio mediante el Método Fijo de Grietas Dispersas.

1.5 Objetivos Específicos

- Desarrollar la formulación pseudo-estática de elementos finitos considerando el Enfoque Fijo del Modelo de Grietas Dispersas y calcular la Matriz tangente para la solución del problema de agrietamiento.
- Desarrollar el código de Elementos Finitos para la simulación del agrietamiento mediante el Enfoque Fijo del Modelo de Grietas Dispersas de la Mecánica de Fractura considerando la degradación del concreto
- Realizar el análisis computacional de vigas sometidas a cargas de servicio mediante la metodología obtenida.

2 METODOLOGÍA

Para la presente investigación se realizará en tres grandes pasos: Recolección de información, en donde se buscará gran parte de la información necesaria para fundamentar la propuesta y profundizar los conocimientos necesarios para elaborar el marco teórico; Desarrollo del código, en donde se programarán los algoritmos necesarios para el desarrollo del problema y finalmente la discusión de resultados en donde se compararán los resultados obtenidos por el código con otros modelos computacionales.

2.1 Recolección de información

Para la recolección de información se emplearán numerosos libros y papers de diferentes partes del mundo sobre elementos finitos y mecánica de fracturas. Así, se obtendrán las ecuaciones fundamentales de los mismos, así como diversos parámetros a ser empleados en la investigación.

2.2 Desarrollo del código

Para desarrollar el código se emplearán ejemplos obtenidos en la etapa anterior, comparando resultados individuales de las diferentes subrutinas a ser elaboradas a lo largo del desarrollo de la programación y corrigiendo errores cuando se presenten.

2.3 Discusión de resultados

Para la discusión de resultados se evaluarán resultados obtenidos del código para diversos ejemplos encontrados en la literatura y se verificarán parámetros y gráficos, corrigiendo errores e interpretando las diferencias de los resultados en caso sea competente

3 MARCO TEORICO

3.1 Método de Elementos Finitos

3.1.1 Introducción al método de elementos finitos

Cuando se tiene un problema muy complejo, una forma factible de resolverlo es discretizar dicho problema en “elementos” más pequeños cuyo comportamiento sea conocido. Así, es natural para ingenieros y científicos utilizar esta metodología para reconstruir dicho problema y estudiarlo a partir de estos elementos. Así, cuando en un modelo se obtiene un número determinado de elementos se le denomina discreto. Sin embargo, cuando la cantidad de elementos se incrementa y el tamaño de dichos elementos disminuye y se considera como un problema infinitesimal son necesarias las ecuaciones diferenciales o expresiones equivalentes con un número infinito de elementos. A este tipo de problemas se les llama continuos. Por otra parte, el desarrollo tecnológico trajo consigo el incremento del poder computacional de los ordenadores haciendo factible que los problemas continuos. Sin embargo, pese a las mejoras tecnológicas para la resolución de problemas continuos son necesarios métodos de discretización y aproximación, como el Método de Elementos Finitos (Zienkiewicz & Taylor, 1994).

3.1.2 Desarrollo de ecuaciones fundamentales

Para obtener las ecuaciones de equilibrio de un sistema estático se considera un volumen diferencial sometido a esfuerzos, según lo expuesto en Reddy (2006).

Figura 2: Estado de esfuerzos en un elemento diferencial. Elaboración propia

De la Segunda Ley de Movimiento de Newton se obtienen las siguientes ecuaciones de equilibrio (Reddy, 2006). En primer lugar, se evalúa el equilibrio en la dirección X.

$$\begin{aligned} \left(\sigma_{xx} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dx \right) dydz - \sigma_{xx} dydz + \left(\sigma_{yx} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} dy \right) dx dz - \sigma_{yx} dx dz + \left(\sigma_{zx} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} dz \right) dx dy \\ - \sigma_{zx} dx dy + \rho f_x dx dy dz = \left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} + \rho f_x \right) dx dy dz \end{aligned} \quad (1)$$

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} + \rho f_x = \rho \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} \quad (2)$$

De igual manera se desarrollan las ecuaciones en las direcciones Y y Z.

$$\frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial z} + \rho f_y = \rho \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} \quad (3)$$

$$\frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \rho f_z = \rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} \quad (4)$$

Przemieniecki (1968) plantea la obtención de dichas ecuaciones mediante el cálculo de los momentos alrededor de los ejes x, y y z. Finalmente, las ecuaciones (1), (2) y (3) son conocidas como las ecuaciones de balance en un diferencial de volumen con un sistema cartesiano en tres dimensiones. A continuación, se presenta la ecuación de balance en forma indicial.

$$\frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} + \rho f_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \quad (5)$$

En el caso de un sistema en dos dimensiones, las ecuaciones de balance a considerar serán las siguientes.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} + \rho f_x &= \rho \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} \\ \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \rho f_y &= \rho \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (6)$$

Cabe resaltar que los términos del lado derecho de la ecuación (6) no serán considerados en la presente investigación ya que se desarrollarán problemas estáticos.

Con respecto a las ecuaciones cinemáticas, éstas se presentan a partir del campo de desplazamientos adoptado y del tensor lineal de deformaciones.

$$u_x(x, y) = u_x \quad (7)$$

$$u_y(x, y) = u_y$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x} + \frac{\partial u_j}{\partial y} \right) \quad (8)$$

Donde:

u_i = desplazamiento en la dirección i,

ε_{ij} = componente de deformación la dirección i con respecto a j,

$\frac{\partial u_i}{\partial x}, \frac{\partial u_j}{\partial y}$ = variaciones del desplazamiento.

Finalmente, se presentan las ecuaciones constitutivas para el estado plano de esfuerzos.

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E}{1-\nu^2} & \frac{\nu E}{1-\nu^2} & 0 \\ \frac{\nu E}{1-\nu^2} & \frac{E}{1-\nu^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E}{2(1+\nu)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ 2\varepsilon_{xy} \end{bmatrix} \quad (9)$$

3.1.3 Formulación débil de Galerkin

Según lo expuesto por Reddy (2006) la forma débil de una ecuación diferencial es una expresión integral de la misma en la cual las derivadas actuantes sobre las variables dependientes son transferidas a las variables independientes. De esta manera, se logra que las condiciones de borde naturales del problema sean incluidas en la ecuación para su posterior solución.

Para el desarrollo general de la Formulación débil de Galerkin, se parte considerando el siguiente problema de contorno:

$$L(u) = f \text{ en } \Omega \quad (10)$$

$$R(u) = g \text{ en } \Gamma \quad (11)$$

Donde $\mathbf{L}$ es un operador diferencial lineal actuante en el dominio del problema y $\mathbf{R}$ es un operador lineal de contorno del dominio, mientras que $\mathbf{f}$ y $\mathbf{g}$ son funciones conocidas de las variables independientes.

Luego, es necesario multiplicar la ecuación (10) por una función $\mathbf{w}$, para luego integrarla en el dominio Ω .

$$\int_{\Omega} \mathbf{w}(\mathbf{L}(\mathbf{u}) - \mathbf{f})d\Omega = 0 \quad (12)$$

Seguidamente, es necesario integrar por partes la ecuación (12) para transferir las derivadas presentes en el operador diferencial $\mathbf{L}$ de la variable dependiente a la variable independiente; así como para incorporar las condiciones de bordes naturales o variables secundarias en la ecuación (Reddy, 2002; Reddy, 2006) .

$$\int_{\Omega} \mathbf{w}'(\mathbf{L}(\mathbf{u})d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{w}\mathbf{f}d\Omega - \int_{\Gamma} \mathbf{w}(\mathbf{R}(\mathbf{u}) - \mathbf{g})d\Gamma = 0 \quad (13)$$

En este procedimiento, la función $\mathbf{w}$ representa una variación de la variable primaria $\delta\mathbf{u}$. Según lo expuesto en Reddy (2006) forma débil de una ecuación diferencial existe para problemas lineales o no lineales si esta contiene derivadas de segundo orden o superiores. Adicionalmente, Reddy (2006) expone que el resultado de este procedimiento representa, en problemas de Mecánica de Materiales, el Principio de la Mínima Energía Potencial Estacionaria.

Por otro lado, luego del desarrollo de la forma débil de la ecuación diferencial, la función $\mathbf{w}$ puede ser definida de diversas maneras con la condición de que debe permitir derivadas no nulas continuas en $\mathbf{L}$. En cuanto al Método de Galerkin, estas funciones son las mismas que aquellas elegidas para aproximar la variable dependiente $\mathbf{u}$.

3.2 Mecánica de fracturas

3.2.1 Introducción a la mecánica de fracturas

El concreto es un material cuyo comportamiento es difícil de predecir y expresar de manera matemática debido a su propia naturaleza como un material heterogéneo producto de la mezcla de diferentes componentes. Por este motivo y considerando los motivos por los cuales es importante considerar la Mecánica de Fractura en el análisis del comportamiento del concreto (American Concrete Institute, Committee 446.1R-91, 1992), autores como Rashid (1968), Bažant & Oh (1983) y Rots (1988) propusieron modelos y metodologías que permitan simular el agrietamiento de elementos compuestos por este material.

Los modelos de simulación del agrietamiento pueden ser categorizados en dos grupos. El primero de ellos es el Modelo de Grietas Discretas. Este evalúa la formación de grietas a partir de la noción física de separación ante la formación de una grieta. Es decir, genera una discontinuidad geométrica en el enmallado de elementos finitos. Según Rots (1988), esta metodología fue la primera utilizada para el análisis del agrietamiento. La desventaja de este método es que requiere de una constante actualización de la conectividad nodal de los elementos finitos. Debido a ello, el costo computacional es elevado y requiere de algoritmos automatizados de enmallado.

Por otro lado, el Modelo de Grietas Dispersas ya no considera la separación entre elementos debido al agrietamiento del material, puesto que el elemento agrietado es considerado como un campo continuo en el que la grieta es tratada mediante un cambio en la ecuación constitutiva del mismo (Bittencourt, Menin, & Trautwein, 2009). La metodología introducida por Rashid (1968) se enfoca en la evaluación de esfuerzos y deformaciones para evaluar el agrietamiento de un elemento. En este sentido, ante la formación de una grieta en un subdominio, este pasa de un estado isotrópico a uno ortotrópico (Rots, 1988). Comparado con el Modelo Discreto, este sí se desarrolla acorde al Método de Elementos Finitos basado en Desplazamientos debido a que se garantiza la continuidad del campo de desplazamientos del sistema (Blaauwendraad & Rots, 1989). Otra ventaja es que permite que las grietas se formen dentro de los elementos. Además, no impone restricciones en cuanto a la dirección de estas, mientras que en el método discreto las grietas se pueden generar solamente entre los elementos. Es decir, el costo computacional de este modelo es menor.

El Modelo de Grietas Dispersas es categorizado en tres grupos: Fijo, Rotacional o Fijo Multi-Direccional (Rots, 1988). La diferencia principal entre ellos es la orientación de la grieta. Mientras que en el Enfoque Fijo la dirección de la falla permanece fija durante el proceso computacional, en el Enfoque Rotacional esta varía en función a los ejes principales de esfuerzo. Por otro lado, mediante una evaluación multi-direccional la dirección de la grieta es actualizada a través de un ángulo de retención, en función al estado de esfuerzos del elemento. Según lo expuesto por Bittencourt et. al (2009) el Modelo de Grietas Dispersas se evalúa mediante la combinación de un criterio de falla, el nivel de transferencia de esfuerzos ante la falla de un elemento en la grieta y del modelo de ablandamiento degradación del concreto (frágil, lineal, multilineal o no-lineal). Para la presente tesis se ha decidido aplicar el Enfoque Fijo, siendo válido su uso únicamente en elementos estructurales pseudo-frágiles como el concreto

3.2.2 Enfoque fijo de grietas dispersas

Como característica principal, Enfoque Fijo plantea que la dirección de las grietas permanece constante luego de su formación (Rots, 1988). Por otro lado, el Modelo de Grietas Dispersas se evalúa mediante una descomposición del tensor de deformaciones en uno correspondiente al concreto no agrietado ε^{co} y otro a la grieta ε^{cr} .

$$\Delta \varepsilon = \Delta \varepsilon^{cr} + \Delta \varepsilon^{co} \quad (14)$$

Donde:

$\Delta \varepsilon$ = incremento deformación total,

$\Delta \varepsilon^{cr}$ = incremento de deformación de la grieta,

$\Delta \varepsilon^{co}$ = incremento de deformación del concreto entre las grietas.

Según lo desarrollado por Rots (1988), es necesario relacionar el incremento de deformaciones en las coordenadas locales de la grieta con un incremento en coordenadas globales. En este sentido, las deformaciones de la grieta solo ocurren en una zona específica denominada como ancho de banda. Esta propuesta fue planteada originalmente por Bažant (1976). Adicionalmente, necesario ajustar el modelo según el tamaño de los elementos finitos. En caso contrario, según Blaauwendraad (1989), los resultados obtenidos serán dependiente del enmallado. A continuación, se presenta la ecuación.

Figura 3: Esfuerzos locales en la grieta. Elaboración propia

$$\begin{bmatrix} \Delta \varepsilon_{xx}^{cr} \\ \Delta \varepsilon_{yy}^{cr} \\ \Delta \gamma_{yy}^{cr} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & -\sin \theta \cos \theta \\ \sin^2 \theta & \sin \theta \cos \theta \\ 2 \sin \theta \cos \theta & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \varepsilon_{nn}^{cr} \\ \Delta \varepsilon_{nt}^{cr} \end{bmatrix} \quad (15)$$

$$\Delta \varepsilon^{cr} = N \Delta e^{cr} \quad (16)$$

Donde:

$\Delta \varepsilon^{cr}$ = deformación de la grieta en coordenadas globales,

Δe^{cr} = deformación de la grieta en coordenadas locales,

N = matriz de transformación de coordenadas locales a globales,

θ = ángulo desde el eje X hasta la dirección normal a la grieta.

Por otro lado, es necesario relacionar los esfuerzos en el sistema de referencia local de la grieta con los del sistema global.

$$\begin{bmatrix} \Delta \sigma_{nn}^{cr} \\ \Delta \sigma_{nt}^{cr} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & 2 \sin \theta \cos \theta \\ -\sin \theta \cos \theta & \sin \theta \cos \theta & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \sigma_{xx}^{cr} \\ \Delta \sigma_{yy}^{cr} \\ \Delta \sigma_{yy}^{cr} \end{bmatrix} \quad (17)$$

$$\Delta s^{cr} = N^T \Delta \sigma \quad (18)$$

Donde:

Δs^{cr} = esfuerzos en coordenadas locales de la grieta

$\Delta \sigma$ = esfuerzos en coordenadas globales

N^T = transpuesta de la matriz de transformación

Posteriormente, es necesario plantear los modelos constitutivos para el concreto entre las grietas y para las grietas. En primer lugar, se presenta la ecuación para el material no agrietado.

$$\Delta \sigma = D^{co} \Delta \epsilon^{co} \quad (19)$$

Dónde:

$\Delta \sigma$ = esfuerzos en coordenadas globales del concreto no agrietado

D^{co} = matriz constitutiva del elemento no agrietado

$\Delta \epsilon_{co}$ = deformación del concreto entre las grietas

A continuación, se presenta la ecuación para el material agrietado.

$$\Delta s^{cr} = D^{cr} \Delta e^{cr} \quad (20)$$

Dónde:

Δs^{cr} = esfuerzos en coordenadas locales de la grieta,

D^{cr} = matriz constitutiva del elemento agrietado,

Δe_{cr} = deformación de la grieta en coordenadas locales.

Luego, según el procedimiento explicado por Rots (1988), se procede a desarrollar las relaciones presentadas. En primer lugar, se reemplaza la ecuación (14) en la (16).

$$N^T \Delta \sigma = D^{cr} \Delta e^{cr} \quad (21)$$

Seguidamente, se reemplaza la ecuación (12) en la ecuación (10).

$$\Delta \epsilon - N \Delta e^{cr} = \Delta \epsilon^{co} \quad (22)$$

Luego, se reemplaza la nueva ecuación (18) en la ecuación (15).

$$\Delta \sigma = D^{co} [\Delta \epsilon - N \Delta e^{cr}] \quad (23)$$

Posteriormente, es necesario desarrollar las ecuaciones (17) y (19).

$$\begin{aligned}
\Delta \mathbf{e}^{cr} &= [\mathbf{D}^{cr}]^{-1} \mathbf{N}^T \mathbf{D}^{co} [\Delta \boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{N} \Delta \mathbf{e}^{cr}] \\
\Delta \mathbf{e}^{cr} [1 + [\mathbf{D}^{cr}]^{-1} \mathbf{N}^T \mathbf{D}^{co} \mathbf{N}] &= [\mathbf{D}^{cr}]^{-1} \mathbf{N}^T \mathbf{D}^{co} \Delta \boldsymbol{\varepsilon} \\
\Delta \mathbf{e}^{cr} &= [1 + [\mathbf{D}^{cr}]^{-1} \mathbf{N}^T \mathbf{D}^{co} \mathbf{N}]^{-1} [\mathbf{D}^{cr}]^{-1} \mathbf{N}^T \mathbf{D}^{co} \Delta \boldsymbol{\varepsilon} \\
\Delta \mathbf{e}^{cr} &= [\mathbf{D}^{cr} + \mathbf{N}^T \mathbf{D}^{co} \mathbf{N}]^{-1} \mathbf{N}^T \mathbf{D}^{co} \Delta \boldsymbol{\varepsilon}
\end{aligned} \tag{24}$$

Finalmente, se reemplaza la ecuación (20) en la ecuación (19) y se obtiene la ecuación constitutiva para el concreto agrietado.

$$\Delta \boldsymbol{\sigma} = [\mathbf{D}^{co} - \mathbf{D}^{co} \mathbf{N} [\mathbf{D}^{cr} + \mathbf{N}^T \mathbf{D}^{co} \mathbf{N}]^{-1} \mathbf{N}^T \mathbf{D}^{co}] \Delta \boldsymbol{\varepsilon} \tag{25}$$

Según Blaauwendraad et al. (1985), el problema es evaluado de manera similar a el concepto de plasticidad, en el cual las características del material se degradan a medida que se generan deformaciones. En este caso, la rigidez del concreto no agrietado $\mathbf{D}^{co}$ se reduce en función al aumento de la deformación en la grieta.

En cuanto a los modelos constitutivos del concreto. En primer lugar, se presenta la matriz isotrópica del material $\mathbf{D}^{co}$ obtenida de Rots (1988).

$$\mathbf{D}^{co} = \frac{E}{1 - \nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - \nu}{2} \end{bmatrix} \tag{26}$$

Dónde:

E = módulo de elasticidad del concreto,

ν = módulo de Poisson.

Con respecto a la matriz constitutiva del elemento agrietado, según Rots (1988).

$$\mathbf{D}^{cr} = \begin{bmatrix} D^I & 0 \\ 0 & D^{II} \end{bmatrix} \tag{27}$$

Dónde:

D^I = módulo de rigidez para el modo I de fractura

D^{II} = módulo de rigidez para el modo II de fractura

Es importante resaltar la razón por la cual los valores que se encuentran fuera de la diagonal principal en la matriz $\mathbf{D}^{cr}$ son nulos. Esta suposición hace referencia a que no

existe interacción entre los modos I y II de fractura. Kuna (2013) explica que, en la Mecánica de Fractura, se realiza una distinción entre distintos tipos de desplazamientos posibles a nivel de una grieta, i.e., se plantean tres modos de fractura. El modo I, o modo de apertura, caracteriza las grietas que se forman de forma perpendicular a la dirección de los esfuerzos de tensión. El modo II, caracteriza los desplazamientos que se generan en el plano de la grieta y se genera por fuerzas de corte. Por otro lado, el modo III define desplazamientos en la grieta en una tercera dimensión.

Figura 4: Modos de fractura. Elaboración propia

Según Blaauwendraad, Kuster, Nauta, & Rots (1985), cuando se plantea evaluar el proceso de degradación, de manera que prevalezca el modo I de fractura, esta suposición no tiene importantes consecuencias en los resultados. Según Rots (1988), este modelo asume que la fractura inicia en el modo I, mientras que el modo II aparece ante la rotación de los ejes principales de esfuerzos. Este será el modelo de falla desarrollado en la presente tesis.

Para la evaluación del agrietamiento, según Rots (1988), es necesario introducir un parámetro de esfuerzo límite en tracción. Este será evaluado en la dirección de los esfuerzos principales. Así, cuando la combinación de esfuerzos principales supere este esfuerzo, se considerará que la grieta se ha formado. Adicionalmente, se plantea que la grieta se formará en la dirección perpendicular a los esfuerzos principales.

Los parámetros necesarios para evaluar el proceso de ablandamiento por tensión a partir de la formación de la grieta son la energía de fractura, definida como la energía necesaria para crear una unidad de área de una grieta del modo I, y la forma del diagrama esfuerzo-deformación; parámetros fijos del modelo (Blaauwendraad & Rots, 1989). A continuación, se presenta la ecuación necesaria para obtener la energía de fractura.

$$G_f = h \int \sigma_{nn}^{cr} d\varepsilon_{nn}^{cr} \quad (28)$$

Dónde:

G_f = Energía de fractura

σ_{nn}^{cr} = esfuerzo del elemento agrietado en la dirección principal

ε_{nn}^{cr} = deformación del elemento agrietado en la dirección principal

h = ancho de banda

Por otro lado, para determinar la forma de la curva tensión deformación es necesario conocer la resistencia a tracción del concreto, la función que regirá dicha curva y la deformación última de la grieta. Según lo presentado en Sena Cruz, Barros, & Azevedo (2006), este valor se obtiene a partir de la siguiente ecuación.

$$\varepsilon_{nn,ult}^{cr} = \frac{1}{k} \frac{G_f}{h f_t} \quad (29)$$

Dónde:

f_t = resistencia a la tracción del concreto,

$$k = \int \sigma_{nn}^{cr}(x) dx.$$

En cuanto al ancho de banda, según Bažant y Oh (1983), este debe cumplir con la siguiente ecuación, con la finalidad de evitar inestabilidades en el modelo numérico.

$$h \leq k \frac{G_f E}{f_t^2} \quad (30)$$

En cuanto a los parámetros para el módulo de rigidez del modo II es necesario evaluar el módulo de rigidez de corte (G) y el factor de retención de corte β , el cual reduce el módulo elástico de corte ante el agrietamiento del material (Rots, 1988). Este factor varía en un rango de cero a uno. En base a lo desarrollado, se realizará el análisis del agrietamiento mediante la siguiente matriz constitutiva de un elemento agrietado:

$$\mathbf{D}^{cr} = \begin{bmatrix} \frac{\mu}{1-\mu} E & 0 \\ 0 & \frac{\beta}{1-\beta} G \end{bmatrix} \quad (31)$$

Dónde:

$\mathbf{D}^{cr}$ = matriz constitutiva del elemento agrietado

G = módulo de corte del concreto

μ = factor de reducción para el modo I de fractura

β = factor de retención de corte

3.2.3 Modelos constitutivos de tensión en la grieta

Se considerará un modelo frágil de agrietamiento, el cual implica que alcanzada la resistencia a tracción máxima del concreto en su dirección principal se produce una abrupta disminución del esfuerzo normal en la grieta (American Concrete Institute, Committee 446.1R-91, 1992). En este modelo, debido a que no se considera la degradación del material, no se consideran los parámetros de ancho de banda ni energía de fractura. Según Kupferm Hilsdorf y Rusch (1969)...

Figura 5: Modelo constitutivo a tracción frágil del concreto.

Elaboración propia

Con un fin teórico, se expone a continuación las ecuaciones necesarias para la evaluación de la fractura mediante un modelo lineal. Este, según lo expuesto por Petersson (1981), requiere de un ajuste en función del ancho de banda y la energía de fractura. Así, la pendiente de la curva tensión-deformación en la grieta se calcula a partir de las ecuaciones (28) y (29). En primer lugar, se determina la deformación última de la curva.

$$\begin{aligned} G_f &= h \int \sigma_{nn}^{cr} d\varepsilon_{nn}^{cr} \\ G_f &= h \times \varepsilon_{nn,ult}^{cr} \times ft \times \frac{1}{2} \\ \varepsilon_{nn,ult}^{cr} &= \frac{2G_f}{fth} \end{aligned} \quad (32)$$

Seguidamente, se calcula el módulo de degradación de rigidez de la grieta.

$$D_c^o = -\frac{1}{2} \frac{f_t^2 h}{G_f} \quad (33)$$

Figura 6: Diagrama lineal tensión-deformación en la grieta.
Elaboración propia

Antes de que el concreto alcance el esfuerzo de tensión último se considera que este se comporta elásticamente. Pasado este límite se considera el modelo presentado en la ecuación principal del modelo, describiendo los dos estados del concreto de manera separada. Este modelo se evidencia en la siguiente figura.

Figura 7. Curvas combinadas de tensión normal y de corte elástica y en la grieta. Elaboración propia.

3.2.4 Modelo constitutivo del acero

Según Srinivasan y Sathiya (2010) y Oldřich y Jiří (2011) existen diversas formas de introducir acero de refuerzo en el método de elementos finitos. Para la presente investigación se consideraron elementos de refuerzo unidimensionales ubicados de tal manera que sus extremos estuviesen ubicados en los nodos de los elementos de concreto. Así, la rigidez aportada por el acero de refuerzo es añadida directamente a los nodos existentes en el enmallado. Por otro lado, la presente tesis consideró un modelo lineal elástico para el acero.

3.3 Análisis clásico de agrietamiento

3.3.1 Momentos de inercia efectivo

En la mecánica tradicional, cuando es necesario calcular deflexiones existe un problema en la determinación del momento de inercia a emplear, puesto que se debe estimar el agrietamiento ocurrido en el elemento (McCormac & Brown, 2011). Así, para cualesquiera sean las condiciones de borde presentes, si el momento flector es mayor al momento de agrietamiento se asume que solo la sección total sin agrietar proporcionará rigidez, es decir se reduce la sección y por lo tanto su inercia (American Concrete Institute, Committee 435, 2000).

Figura 8: Efecto de las grietas en vigas, por McCormac & Brown (2011)

Así, según la ecuación propuesta por el ACI para la determinación de la inercia efectiva de concreto agrietado es propuesta según la investigación de Branson (Branson, 1963):

$$I_e = \left(\frac{M_{cr}}{M_a}\right)^3 I_g + \left[1 - \left(\frac{M_{cr}}{M_a}\right)^3\right] I_{cr} \quad (34)$$

Dónde:

I_e = momento de inercia efectiva,

I_g = Inercia de sección bruta,

M_{cr} = Momento de agrietamiento,

M_a = Momento máximo bajo cargas de servicio.

Asimismo, McCormac & Brown (2011) señalan que el momento de agrietamiento es calculado en función al eje neutro, la resistencia a la tracción y al momento de inercia bruto de acuerdo a:

$$M_{cr} = \frac{f_r I_g}{y_t} \quad (35)$$

Dónde:

f_r = Resistencia a tracción del concreto,

I_g = Inercia de sección bruta,

y_t = Longitud del eje neutro.

Finalmente, McCormac & Brown (2011), plantea una relación para determinar la resistencia a tracción del concreto a partir de la resistencia a compresión del concreto, el cual es llamado módulo de fractura:

$$f_r = 7.5\lambda\sqrt{f'_c} \quad (36)$$

Dónde:

f'_c = Resistencia a compresión del concreto,

λ = Factor empírico.

4 DESARROLLO MATEMÁTICO

4.1 Formulaci3n elástica lineal

4.1.1 Ecuaciones fundamentales

Un problema en un estado plano de esfuerzos es definido si es que el siguiente estado de esfuerzos existe en el problema.

$$\begin{aligned} \sigma_{xz} = \sigma_{yz} = \sigma_{zz} = 0 \\ \sigma_{xx} = \sigma_{xx}(x, y), \quad \sigma_{xy} = \sigma_{xy}(x, y), \quad \sigma_{yy} = \sigma_{yy}(x, y) \end{aligned} \quad (37)$$

El estado de deformaciones asociado con el estado de esfuerzos a partir de la ley constitutiva de la ecuaci3n (9), desarrollada para un material isotrópico.

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & 0 \\ c_{21} & c_{22} & 0 \\ 0 & 0 & c_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ 2\epsilon_{xy} \end{bmatrix} \quad (38)$$

Donde c_{ij} son los índices de rigidez elásticos

$$c_{11} = c_{22} = \frac{E}{1 - \nu^2}, \quad c_{12} = c_{21} = \frac{\nu E}{1 - \nu^2}, \quad c_{66} = G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (39)$$

Seguidamente, es necesario desarrollar el tensor de deformaciones de Green-Lagrange expresado previamente en la ecuaci3n (8)

$$\epsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x}, \quad \epsilon_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y}, \quad \epsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) \quad (40)$$

Seguidamente, se presentan las ecuaciones de balance obtenidas previamente considerando un sistema en el cual las aceleraciones son nulas.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} + \rho f_x = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \rho f_y = 0 \end{aligned} \quad (41)$$

Se presentan las condiciones de borde naturales, aquellas que no se ven afectadas por variaciones de la variable dependiente.

$$t_x \equiv \sigma_{xx}n_x + \sigma_{xy}n_y = \hat{t}_x \quad (42)$$

$$t_y \equiv \sigma_{xy}n_x + \sigma_{yy}n_y = \hat{t}_y \quad (43)$$

A continuación, se presentan las condiciones de borde esenciales, aquellas que especifican a la variable dependiente.

$$u_x = \hat{u}_x, \quad u_y = \hat{u}_y \quad (44)$$

Luego, es necesario reemplazar las ecuaciones de las leyes constitutivas en la ecuación (41), obteniendo así las ecuaciones diferenciales que rigen el modelo en un estado plano de esfuerzos.

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(c_{11} \frac{\partial u_x}{\partial x} + c_{12} \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(c_{66} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) \right) + \rho f_x = 0 \quad (45)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(c_{66} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(c_{12} \frac{\partial u_x}{\partial x} + c_{22} \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) + \rho f_y = 0 \quad (46)$$

Adicionalmente, se presentan a continuación los componentes de esfuerzos en el borde del sistema, reemplazando la ecuación (33) en (40) y (41).

$$t_x = \left(c_{11} \frac{\partial u_x}{\partial x} + c_{12} \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) n_x + \left(c_{66} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) \right) n_y \quad (47)$$

$$t_y = \left(c_{66} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) \right) n_x + \left(c_{12} \frac{\partial u_x}{\partial x} + c_{22} \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) n_y \quad (48)$$

4.1.2 Formulación débil de Galerkin

Para la solución de la ecuación (41) es necesario aplicar el procedimiento explicado previamente. Este consiste en multiplicar las ecuaciones diferenciales de interés por una función de peso w y luego integrar por partes para reducir el orden de derivación de las variables dependientes, para finalmente reemplazar las condiciones de borde en el resultado. A continuación, se desarrolla en primer lugar la ecuación (45).

$$\int_{\Omega} w_1 \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(c_{11} \frac{\partial u_x}{\partial x} + c_{12} \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(c_{66} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) \right) + \rho f_x \right\} d\Omega = 0$$

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \left\{ \frac{\partial w_1}{\partial x} \left(c_{11} \frac{\partial u_x}{\partial x} + c_{12} \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) + \frac{\partial w_1}{\partial y} \left(c_{66} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) \right) \right\} d\Omega = \int_{\Omega} w_1 f_x d\Omega + \\
& \oint_{\Gamma} \left\{ w_1 \left[\left(c_{11} \frac{\partial u_x}{\partial x} + c_{12} \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) n_x + \left(c_{66} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) \right) n_y \right] \right\} d\Gamma \\
& \int_{\Omega} \left\{ \frac{\partial w_1}{\partial x} \left(c_{11} \frac{\partial u_x}{\partial x} + c_{12} \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) + \frac{\partial w_1}{\partial y} \left(c_{66} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) \right) \right\} d\Omega \quad (49) \\
& = \int_{\Omega} w_1 f_x d\Omega + \oint_{\Gamma} w_1 t_x d\Gamma
\end{aligned}$$

Luego se desarrolla de la misma manera la ecuación (46)

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} w_2 \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(c_{66} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(c_{12} \frac{\partial u_x}{\partial x} + c_{22} \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) + \rho f_y \right\} d\Omega = 0 \\
& \int_{\Omega} \left\{ \frac{\partial w_2}{\partial x} \left(c_{66} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) \right) + \frac{\partial w_2}{\partial y} \left(c_{12} \frac{\partial u_x}{\partial x} + c_{22} \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) \right\} d\Omega = \\
& \int_{\Omega} w_2 f_y d\Omega + \oint_{\Gamma} \left\{ w_2 \left[\left(c_{66} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) \right) n_x + \left(c_{12} \frac{\partial u_x}{\partial x} + c_{22} \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) n_y \right] \right\} d\Gamma \\
& \int_{\Omega} \left\{ \frac{\partial w_2}{\partial x} \left(c_{66} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) \right) + \frac{\partial w_2}{\partial y} \left(c_{12} \frac{\partial u_x}{\partial x} + c_{22} \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) \right\} d\Omega \quad (50) \\
& = \int_{\Omega} w_2 f_y d\Omega + \oint_{\Gamma} w_2 t_y d\Gamma
\end{aligned}$$

Luego de desarrollar las ecuaciones (47) y (48), se procede a discretizar el dominio del sistema:

$$\Omega = \bigcup_{e=1}^n \Omega_e \quad y \quad \Gamma = \bigcup_{e=1}^n \Gamma_e$$

Se plantea la aproximación de elementos finitos y se resuelve el sistema de ecuaciones lineales que resulta de dicha aproximación.

$$\mathbf{u} \cong u_e(x, y) = \sum_{j=1}^N u_j \psi_j(x, y)$$

Esta aproximación debe ser desarrollada para el desplazamiento vertical y el desplazamiento horizontal de manera independiente. Estas aproximaciones se plantean mediante los polinomios de Lagrange.

$$u_x(x, y) = \sum_{j=1}^N u_{xj} \psi_j^{(1)}(x, y), \quad u_y(x, y) = \sum_{j=1}^N u_{yj} \psi_j^{(2)}(x, y) \quad (51)$$

Finalmente, sustituyendo las aproximaciones planteadas en las ecuaciones (47) y (48) obtenidas a partir del desarrollo de la Formulación Débil de Galerkin se obtiene el siguiente modelo.

$$\begin{bmatrix} [K^{11}] & [K^{12}] \\ [K^{21}] & [K^{22}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{u_x\} \\ \{u_y\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{F_x\} \\ \{F_y\} \end{Bmatrix} \quad (52)$$

Donde la matriz de rigidez está conformada por los siguientes términos:

$$K_{ij}^{11} = \int_{\Omega_e} \left(c_{11} \frac{\partial \psi_i^{(1)}}{\partial x} \frac{\partial \psi_j^{(1)}}{\partial x} + c_{66} \frac{\partial \psi_i^{(2)}}{\partial y} \frac{\partial \psi_j^{(2)}}{\partial y} \right) d\Omega_e$$

$$K_{ij}^{12} = K_{ij}^{21} = \int_{\Omega_e} \left(c_{12} \frac{\partial \psi_i^{(1)}}{\partial x} \frac{\partial \psi_j^{(2)}}{\partial y} + c_{66} \frac{\partial \psi_i^{(1)}}{\partial y} \frac{\partial \psi_j^{(2)}}{\partial x} \right) d\Omega_e$$

$$K_{ij}^{22} = \int_{\Omega_e} \left(c_{66} \frac{\partial \psi_i^{(1)}}{\partial x} \frac{\partial \psi_j^{(1)}}{\partial x} + c_{22} \frac{\partial \psi_i^{(2)}}{\partial y} \frac{\partial \psi_j^{(2)}}{\partial y} \right) d\Omega_e$$

4.2 Integración numérica

Según Reddy (2006), una representación adecuada de algún dominio irregular puede ser logrado mediante mallas refinadas y/o empleando elementos irregulares curvilíneos. Asimismo, sostiene que debido a que las funciones de forma para elementos rectangulares son fácilmente derivables y que evaluar integrales en geometrías rectangulares, es posible transformar las expresiones integrales en elementos finitos definidas para regiones con formas cuadrangulares. Señala que la expresión obtenida para dicha transformación es compleja en términos de las coordenadas usadas para el rectángulo por lo que es empleada la integración numérica. Así, el autor menciona que los esquemas de integración numérica,

como el de Gauss-Lengedre, el cual es usado en la presente investigación, requiere que la expresión integral sea evaluada en un dominio específico o en un sistema de coordenadas específico.

Reddy (2006) explica que para la cuadratura Gauss-Lengedre es necesario que la expresión integral sea evaluada en una región cuadrada de $2 \times 2 \Omega$ y en el sistema coordenado (ξ, η) tal que se cumpla que $-1 \leq (\xi, \eta) \leq 1$. Así, se transforma el elemento diferencial de coordenadas cartesianas (x, y) hacia un sistema de coordenadas del elemento maestro (ξ, η) . Adicionalmente, dada la complejidad en la integración de cada elemento diferencial debido a su geometría, se requiere realizar dicha transformación de coordenadas para simplificar la integración numérica. Cabe resaltar que dicha transformación de coordenadas se realiza con el único propósito de evaluar la integración numérica.

Figura 9: Tipos de cuadratura Gauss-Lengedre. Elaboración propia

Según lo recomendado por Cai (2007), se implementaron para el enmallado del sistema cuadriláteros isoparamétricos bilineales de cuatro nodos, cada uno de ellos de 2 grados de libertad (u_x, u_y) , haciendo un total de ocho grados de libertad por elemento. Adicionalmente, se consideró una integración por Gauss-Legendre completa.

Según lo expuesto, los elementos diferenciales del sistema en análisis son mapeados del sistema de referencia cartesiano al del elemento maestro a partir de las siguientes ecuaciones.

$$\begin{aligned} x &= a_1 + a_2 \xi + a_3 \eta + a_4 \xi\eta \\ y &= b_1 + b_2 \xi + b_3 \eta + b_4 \xi\eta \end{aligned} \quad (53)$$

Adicionalmente, a continuación, se presentan las funciones de interpolación para el elemento a utilizar.

$$\begin{aligned}
 \psi_1 &= \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta) \\
 \psi_2 &= \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta) \\
 \psi_3 &= \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta) \\
 \psi_4 &= \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta)
 \end{aligned}
 \tag{54}$$

4.3 Formulación no-lineal elástica del modelo fijo de grietas dispersas

4.3.1 No-linealidad del material

Según Öchsner y Merkel (2018) la principal característica de un modelo no-lineal elástico es que el diagrama esfuerzo-deformación resultante sigue una curva no lineal y que la curva de descarga sigue exactamente la misma trayectoria. Adicionalmente, los autores explican que en un modelo no-lineal, la ley de Hooke tiene sentido solo expresada mediante una ecuación diferencial.

$$\frac{d\sigma(\epsilon)}{d\epsilon} = E(\epsilon)$$

Ante el caso en estudio, la ley esfuerzo-deformación se plantea en la dirección del esfuerzo principal bidimensional.

$$\frac{d\sigma(\epsilon_p)}{d\epsilon_p} = E(\epsilon_p(x, y))$$

Para ello, en primer lugar, es necesario obtener la dirección de los esfuerzos principales a partir de la siguiente ecuación.

$$\tan 2\theta_p = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}} \tag{55}$$

Luego de obtenido el ángulo de direcciones principales, se procede a obtener la deformación principal del elemento diferencial en análisis.

$$\epsilon_p = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} + \frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2} \cos 2\theta_p + \epsilon_{xy} \sin 2\theta_p \quad (56)$$

Seguidamente, considerando el tensor de deformaciones de Green-Lagrange presentado en la ecuación (35).

$$\begin{aligned} \epsilon_p = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} - \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) \cos 2\theta_p \\ + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) \sin 2\theta_p \end{aligned} \quad (57)$$

En la presente tesis se contempla como única fuente de no-linealidad a la relación entre los esfuerzos y deformaciones en la grieta, siendo este un aspecto teórico. Esta se presentó en la ley constitutiva, evaluado en la dirección principal (53). Seguidamente, se evalúa la ecuación (25), resultando en la ecuación constitutiva no lineal del modelo computacional desarrollado. Esta reemplaza a la ecuación (33) y se procede desarrollar la forma débil de la ecuación diferencial resultante, con la finalidad de obtener un sistema de ecuaciones no-lineal similar a la ecuación (50), con la diferencia de que la matriz de rigidez será dependiente del desplazamiento. En este sentido, el sistema de ecuaciones será de la forma:

$$\begin{bmatrix} [K^{11}(u_x, u_y)] & [K^{12}(u_x, u_y)] \\ [K^{21}(u_x, u_y)] & [K^{22}(u_x, u_y)] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{u_x\} \\ \{u_y\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{F_x\} \\ \{F_y\} \end{Bmatrix} \quad (58)$$

4.3.2 Algoritmo de Newton-Raphson

El desarrollo mediante el Método de Elementos Finitos de ecuaciones diferenciales no-lineales da como resultado sistemas de ecuaciones matriciales no-lineales como la presentada en ecuación (55). En estos sistemas, la matriz de rigidez es dependiente de los desplazamientos.

A continuación, se presenta el Método de Newton-Raphson, según lo expuesto por Reddy (2016) Las ecuaciones de los sistemas no-lineales pueden ser expresadas de forma general mediante la siguiente expresión:

$$K(u) \cdot u = F \quad (59)$$

En donde u es la solución del sistema y $K(u)$ representa a una función de u . La ecuación (56) puede ser reordenada de tal manera que se represente un residual, considerando que se obtendrá la solución del sistema mediante iteraciones.

$$R(u) = K(u) \cdot u - F \quad (60)$$

Este residual puede ser expandido a partir de las Series de Taylor evaluadas en una solución conocida del sistema en una iteración previa ($r - 1$).

$$R(u) = R(u^{(r-1)}) + \left. \frac{\partial R}{\partial u} \right|_{u^{(r-1)}} \delta u + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 R}{\partial u^2} \right|_{u^{(r-1)}} (\delta u)^2 + \dots = 0 \quad (61)$$

En donde δu representa al incremento de la solución.

$$\delta u^{(r)} = u^{(r)} - u^{(r-1)} \quad (62)$$

Para la solución del sistema, es válido asumir que los términos cuadráticos y de mayor orden en la ecuación (58) son despreciables. En este sentido, la ecuación (58) puede ser reordenada para la solución del incremento δu .

$$\delta u = - \left(\left. \frac{\partial R}{\partial u} \right|_{u^{(r-1)}} \right)^{-1} R(u^{(r-1)}) \quad (63)$$

En donde se identifica a la matriz tangente como:

$$K_T = \left. \frac{\partial R}{\partial u} \right|_{u^{(r-1)}} \quad (64)$$

La matriz tangente también puede ser expresada, conforma a lo desarrollado previamente, de forma indicial.

$$(K_T)_{ij} = \frac{\partial R_i}{\partial U_j} = K_{ij} + \sum_{k=1}^n \frac{\partial R_{ik}}{\partial U_j} U_k \quad (65)$$

Por otro lado, en una solución iterativa, el residual $R(u^{(r-1)})$, representa la diferencia entre las fuerzas internas y externas del sistema, es decir, el desbalance de fuerzas. Este residual será reducido gradualmente en cada cálculo de la solución de la iteración (r) hasta que se cumpla cierto criterio de convergencia o cuando el número de iteraciones realizadas exceda al número de iteraciones permitidas.

$$u^{(r)} = \delta u^{(r)} + u^{(r-1)} \quad (66)$$

En la siguiente figura se expresa de forma gráfica el Método de Newton-Raphson. En este, se parte de una solución aproximada y se calcula la matriz tangente en función a dicha solución tentativa. Luego, según el desbalance existente entre la fuerza externa y la fuerza interna se calcula la nueva solución. Si el resultado no converge se vuelve a calcular la matriz tangente y se repite el procedimiento.

Figura 10: Forma gráfica del Método de Newton-Raphson. Adaptado de “The Newton-Raphson scheme. A case of convergence.” (Reddy, 2016)

En cuanto al criterio de convergencia, este se plantea en función a la siguiente ecuación:

$$\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (u_i^{(r)} - u_i^{(r-1)})^2}{\sum_{i=1}^n (u_i^{(r)})^2}} < tol \quad (67)$$

Cabe resaltar que para la solución del problema se planteó un algoritmo por control de fuerzas y por control de desplazamientos según lo expuesto por de Borst, Crisfield, Remmers y Verhoosel (2012).

4.3.3 Inestabilidad numérica

El análisis no lineal de estructuras de concreto armado y simple considerando modelos de degradación del material, según es expresado por Alnaas (2016), es complejo y requiere de robustos modelos numéricos para la correcta solución de dicho problema mecánico. En este tipo de estructuras, la aparición de zonas de fractura genera problemas de convergencia y de inestabilidad (Crisfield & Wills, 1988; de Borst, 1987)

Asimismo, si el procedimiento a utilizarse para la resolución del problema es un método completo o modificado de Newton-Raphson la matriz tangente pasa a ser negativa y el proceso de solución puede diverger, parar o simplemente nunca encontrar convergencia (Alnaas, 2016). Así, según Crisfield & Wills (1988), cuando se emplea un procedimiento de solución como los mencionados anteriormente la solución pueden converger en un estado de material inestable. Así, según Crisfield & Wills (1988), diversos autores han desarrollado diversas técnicas para tratar de sobreponerse a dicho problema incluso planteando abandonar el sistema de solución Newton-Raphson. En este sentido, existen diversas metodologías para la solución del problema no-lineal; entre estos un Método por Control de Desplazamientos, Método de Riks o de Arco o el Método Generalizado de Control de Desplazamientos (Leon, Paulino, Pereira, Menezes, & Lages, 2012)

5 IMPLEMENTACIÓN NUMÉRICA

5.1 Código pseudo-estático

Para la solución del problema se planteó un programa en el marco del Método de Elementos Finitos y al Enfoque Fijo de Grietas dispersas, expuestos en el Capítulo 2. El diagrama de flujo presenta el procedimiento general del programa para el análisis del agrietamiento.

El programa fue dividido en 6 secciones:

Ingreso de datos: Se especifican las variables iniciales del código, las cuales están referidas, en primer lugar, a los parámetros para los procesos iterativos internos del programa. Se define la tolerancia que deberá cumplirse en los procesos iterativos, el número máximo de iteraciones permitidas, el número de pasos de carga totales y el número de pasos de carga definidos para la evaluación del peso propio del elemento. Cabe resaltar que es posible obviar la evaluación de la carga muerta. Adicionalmente, se debe especificar si se seguirá un control por desplazamientos o por fuerzas para el algoritmo de solución mediante el método de Newton-Raphson. Por último, debido al extenso proceso de cálculo que genera la no-linealidad del problema a solucionar a partir de la aparición de grietas en elemento, se planteó un algoritmo que permite modificar internamente el número de pasos de carga a partir de la formación de la primera grieta, con la finalidad de reducir el tiempo de cómputo total. Esta característica puede ser desactivada si se desea mantener incrementos de desplazamiento o fuerza constantes. Luego, es necesario definir las características geométricas de la viga a evaluar. En primer lugar, se plantean la longitud, la base y la altura del elemento. Seguidamente, se define si se evaluará el modelo considerando la simetría de este, pues en estos casos es posible reducir drásticamente el tiempo de cómputo. A su vez, se debe especificar si se evaluará una viga con o sin una muesca en la zona inferior. Esta característica se introdujo dado que diversos experimentos encontrados en la literatura evalúan vigas de concreto con una muesca para propiciar que la zona de falla se de en la zona central de la viga (Rots, 1988). También se especifican las dimensiones de los subelementos que compondrán a la viga. Después, se definen las condiciones de borde natural y esencial. Finalmente, se especifican las propiedades del material a evaluar. En esta sección se define el módulo de elasticidad del concreto, el módulo de Poisson, el esfuerzo último de tracción y la densidad del material. Adicionalmente, se definen las propiedades para la evaluación de la fractura; estas son la forma de la curva tensión-deformación de la grieta, la energía de fractura, y si se considerará un factor de retención variable o constante.

Algoritmo de enmallado: Esta sección está compuesta de las subrutinas meshpl.m (ver Anexo A.1), la cual generan las coordenadas, la conectividad nodal y los grados de libertad en los cuales han sido especificadas las condiciones de borde naturales y esenciales. Adicionalmente, en esta sección se consideraron recomendaciones para el

tamaño máximo de los subelementos para garantizar un cálculo óptimo del campo de esfuerzos y deformaciones del problema (Rijkswaterstaat Ministry of Infrastructure and the Environment, 2017).

Tabla 1: Recomendaciones para el dimensionamiento de los subelementos para el análisis no-lineal de estructuras de concreto (Rijkswaterstaat Ministry of Infrastructure and the Environment, 2017)

Estructura tipo viga	Tamaño máximo de elemento
Modelado 2D	$\min \left(\frac{l}{50}, \frac{h}{6} \right)$
Modelado 3D	$\min \left(\frac{l}{50}, \frac{h}{6}, \frac{b}{6} \right)$
Estructura tipo losa	Tamaño máximo de elemento
Modelado 2D	$\min \left(\frac{l}{50}, \frac{h}{50} \right)$
Modelado 3D	$\min \left(\frac{l}{50}, \frac{h}{50}, \frac{b}{6} \right)$

Evaluación de cargas: En esta sección se obtienen los aportes de fuerzas debido a el peso propio de la viga y a las cargas distribuidas impuestas en el modelo. El algoritmo que evalúa esta sección es bforce.m (ver Anexo A.2).

Solución incremental de desplazamientos: En esta sección se obtienen los incrementos de desplazamientos para cada paso de carga. La solución del sistema de ecuaciones se resuelve mediante un algoritmo de Newton-Raphson con un control de desplazamientos o de fuerzas. El algoritmo Newton.m (ver Anexo A.3) consiste en un bucle incremental para cada paso de carga, conformado a su vez por una subrutina, denominada karrag.m (ver Anexo A.4), que calcula la matriz de rigidez y la matriz tangente para cada subelemento del dominio las cuales serán ensambladas en las matrices necesarias para resolver el sistema. Seguidamente, puesto que se trata de una solución incremental mediante el balance de las fuerzas externas e internas, el incremento en el desplazamiento que el residual de dichas fuerzas generará en el sistema. Para la solución de este incremento se ha planteado una subrutina denominada postit.m (ver Anexo A.5) en caso de que se evalúe el sistema mediante un incremento desplazamiento. Si se cumple el

criterio de convergencia es válido afirmar que se ha hallado la solución para el paso de carga en análisis, por lo cual se procede con la siguiente sección del programa.

Solución incremental de esfuerzos y deformaciones: Luego de obtener los incrementos de desplazamientos se procede a calcular el nuevo estado de esfuerzos y deformaciones de cada punto de integración. Esta sección consiste de un bucle para cada sub-elemento y para cada punto de integración, en los cuales se obtiene el incremento en las deformaciones y esfuerzos totales, elásticas y de la grieta. Luego del cálculo del incremento de esfuerzos es necesario obtener los esfuerzos principales para evaluar si dicho incremento ha generado algún cambio en el estado del punto de integración en análisis. Si se ha superado el esfuerzo último en tracción se considera que el punto de integración se ha agrietado. Por otro lado, si se supera la deformación última de la grieta se afirma que se ha agrietado completamente dicha sección. Este procedimiento se encuentra plasmado en la subrutina `notcrband.m` (ver Anexo A.6), la cual la incluyen las subrutinas `postit.m`, para la obtención del incremento de deformaciones de la grieta y `crmat.m` (ver Anexo A.7) para el cálculo de las matrices constitutivas del concreto no agrietado, del concreto agrietado y de la grieta.

6 DISCUSIÓN DE RESULTADOS

6.1 Viga de concreto no reforzado

El desempeño del código computacional basado en el modelo Fijo de Grietas Dispersas es evaluado en función a investigaciones de otros autores. En este sentido, en primer lugar, se analiza la viga evaluada por Kormeling y Reinhardt (1983). Según lo expuesto anteriormente, se utilizaron elementos cuadrangulares bilineales compuestos por 4 nodos. A continuación, se presenta un esquema de la viga evaluada. Todas las unidades se presentan en milímetros

Figura 11. Viga evaluada para el análisis. (Rots, 1988)

Para el análisis del modelo se consideró una densidad del concreto de 2400 kg/m^3 . En cuanto a los parámetros elásticos, se considera un Módulo de Poisson igual a 0.20 y un Módulo Elástico de 20000.0 N/m^2 . En cuanto a los parámetros de la simulación del agrietamiento, se consideró un esfuerzo último de tracción de 2.4 N/mm^2 y una energía de fractura de 0.113 N/mm^2 . Finalmente, con respecto al ancho de banda, este se calculó para cada elemento de la malla de elementos finitos como la raíz cuadrada del área de estos.

Se aplicaron desplazamientos en ambos lados de la muesca, obteniéndose grietas en el paso de carga 6, ante un desplazamiento de -0.0225 mm y una carga de 586.39 N . Es claro que las primeras grietas generadas aparecen justo encima de la muesca, en una dirección perpendicular a los esfuerzos principales.

Figura 12: viga con muesca, estado deformado al cuarto paso de carga. Elaboración propia

Seguidamente, el paso de carga 10 genera la máxima carga del sistema, con una deflexión central de -0.0823 mm y una carga de 1376 N.

Figura 13: Paso de máxima capacidad de carga. Elaboración propia

Así, a partir de este estado el elemento empieza a perder la capacidad de carga debido a la degradación del material producto del agrietamiento hasta llegar a la condición última en donde ya no soporta ningún tipo de carga. La siguiente figura muestra el estado de la viga ante un desplazamiento central de -1.00 mm

Figura 14: Estado final del objeto de estudio. Elaboración propia

Así, se muestra que la viga sufrió un agrietamiento de manera concentrada en la muesca con ángulos de aproximadamente 90° . Observándose, además, un agrietamiento de manera simétrica en la viga siendo coherente con la imposición de deformaciones propuesta.

A continuación, se presenta la curva fuerza vs desplazamiento de la viga durante todo el proceso de carga.

Figura 15: Progresión de la falla y curva de fuerza vs desplazamiento.
Elaboración propia

Luego, se presenta una comparación de los resultados obtenidos en el presente trabajo contra lo desarrollado por otros autores.

Figura 16: Curvas fuerza vs deflexión. Elaboración propia

Así, se evidencia que el modelo analizado es capaz de predecir la capacidad pico resistente de la viga, puesto que el valor calculado se encuentra dentro del rango de los resultados experimentales: entre 1600 N y 1200 N aproximadamente. Adicionalmente, se observa que se predice la degradación progresiva en la capacidad de la viga. Sin embargo, esta sección de la curva decae abruptamente debido a que se obtuvo a través de un modelo frágil, motivo por el cual la capacidad decae más rápido que con un modelo lineal o uno exponencial.

6.2 Viga de concreto reforzado

En segundo lugar, se analizó la viga de concreto armado evaluada experimentalmente por Walraven. Se compararán los resultados también con los obtenidos numéricamente por de Borst y Nauta (1985). La viga analizada tiene una luz libre de 1.76 m, un espesor de 0.45 m y un ancho de 0.20 m. Con respecto al acero de refuerzo, se ubicaron una barra de 20 mm de diámetros y dos barras de 14 mm de diámetro, ambas ubicadas a 30 mm de la zona inferior de la viga. Se presenta en el siguiente esquema las dimensiones en metros de la viga evaluada, considerando la simetría de esta.

Figura 17. Enmallado planteado. Elaboración propia

Asimismo, para el presente caso de estudio se consideró un Módulo Elástico de 28000.0 Mpa y un módulo de Poisson igual a 0.20, así como un esfuerzo último de tracción de 2.5 Mpa. Con respecto al acero de refuerzo, se asumió un comportamiento lineal elástico, con un módulo de elasticidad de 210000 Mpa. Además, para la solución del problema se implementó un control de fuerzas para la aplicación de una carga última de 80 kN, ante la cual se obtuvieron los siguientes diagramas de fuerza – desplazamiento, para el enmallado propuesto por de Borst y Nauta (1985) y para un enmallado más tupido

planteado en la presente investigación. A continuación, se presentan los resultados en una gráfica de fuerza contra desplazamiento de la zona central de la viga.

Figura 18: Curva fuerza deflexión en parte central. Elaboración propia

Así, se evidencia que los resultados obtenidos siguen una tendencia que refleja lo obtenido por otros autores. Los resultados tienen un comportamiento lineal hasta que se alcanza una deformación de aproximadamente 0.8 mm y una fuerza actuante de 17 kN. A partir de este punto, la zona traccionada de la viga en la zona central pierde su capacidad, puesto que la grieta supera en longitud a la mitad del peralte de la misma. A partir de este límite, únicamente el acero de refuerzo genera un aporte de rigidez en esta sección. Seguidamente, debido a que se ha considerado un modelo elástico-lineal para el acero, la curva sigue una tendencia aproximadamente lineal. En cuanto a los análisis realizados, primero se evaluó el enmallado propuesto por Borst y Nauta (1985) considerando el modelo frágil de la presente investigación. La primera grieta se forma cuando se ha generado una deflexión central de aproximadamente -0.566 mm y de una fuerza de -15.3 kN. En la siguiente imagen se evidencia un diagrama del sistema en ese estado de carga.

Figura 19: Diagrama del sistema agrietado ante la aparición de la primera grieta. Elaboración propia

Adicionalmente, se observa que la viga desarrolla un comportamiento lineal hasta que alcanza una deformación de -0.7578 mm ante una fuerza actuante de -21.08 kN . Se evidencia la adecuada formación de grietas en un sentido vertical.

Figura 20: Diagrama del sistema agrietado en su límite lineal. Elaboración propia

Finalmente, se presenta el diagrama del sistema agrietado cuanto este alcanza la carga última planteada de 80 kN , generando una deformación central de -13.8894 mm . Se observa en la siguiente figura la aparición de grietas diagonales en la zona cercana a los apoyos.

Figura 21: Diagrama del sistema agrietado en su estado último. Elaboración propia

Asimismo, de manera adicional, Se planteó también un análisis con un enmallado diferente con la finalidad de evaluar la influencia de este factor en el comportamiento del sistema. La primera grieta se forma cuando se ha generado una deformación central de aproximadamente -0.5382 mm y una fuerza de -14.01 kN. En la siguiente figura se presenta el sistema agrietado en este estado de carga.

Figura 22: Diagrama del sistema agrietado ante la aparición de la primera grieta. Elaboración propia

Así, al igual que al analizar el modelo de elementos finitos planteado por Borst y Nauta (1985), se evidenció un comportamiento lineal en las primeras etapas de carga. Este se desarrolló hasta alcanzar una deformación de -0.7483 mm y una carga de 20.0 kN. El diagrama agrietado de este estado se presenta a continuación.

Figura 23: Diagrama del sistema agrietado en su límite lineal. Elaboración propia

A continuación, se presenata el esquema del sistema cuando se ha alcanzado la carga última de 80 kN definida para el análisis, para la cual se obtuvo una deformación central de 12.7748 mm. En la siguiente figura se observa un patrón de grietas más definido. Adicionalmente, se evidencia la aparición de grietas diagonales en las zonas próximas a el apoyo de la viga.

Figura 24: Diagrama del sistema agrietado en su estado último. Elaboración propia

6.3 Vigas de concreto con y sin refuerzo sujetas a cargas de servicio

Para la evaluación de deflexiones instantaneas, el Comité 435 (2000) recomienda el uso de la metodología planteada por Branson (1963). Dicho autor propone el uso de una inercia efectiva para el cómputo de tales deflexiones. Para el cálculo de esta inercia, se hace uso del momento de agrietamiento, el momento máximo en servicio, la inercia total de la sección y el momento de inercia de la sección agrietada transformada. Luego de ello, se realiza un análisis lineal-elástico para una viga unidimensional, considerando esta nueva inercia efectiva agrietada, para el cómputo de la deflexión en servicio (Branson, 1963).

Así, para la validación de su propuesta, Branson (1963) comparó resultados experimentales de vigas evaluadas en su investigación, así como lo evaluado por Washa y Fluck (1952) con lo obtenido mediante la ecuación que este planteo. Se seleccionaron algunas de las vigas analizadas por dicho autor con la finalidad de comparar el modelo de análisis planteado en la presente investigación. Las características de las vigas analizadas se presentan en más adelante, donde B es la base de la viga, D el peralte, d la distancia desde la fibra extrema en compresión al eje del acero positivo, d' la distancia desde la fibra extrema en compresión al eje del acero negativo, f'_t el esfuerzo último en tracción del concreto y E_c el Módulo de Elasticidad del mismo, E_s el Módulo de Elasticidad del acero de refuerzo, ν el Módulo de Poisson, A_s el área de acero positivo y A_s' el área de acero negativo. El enmallado utilizado para el análisis se planteó según recomendaciones para la evaluación de problemas no-lineales en concreto armado (Rijkswaterstaat Ministry of Infrastructure and the Environment, 2017).

Se evidencia que para los casos analizados el porcentaje de error obtenido con respecto a los ensayos experimentales es adecuado si se comparan contra las deflecciones calculadas mediante el método recomendado por el ACI (2000). En la tabla de resultados se puede observar las deflexiones calculadas mediante la propuesta de la presente investigación y lo obtenido por Branson (1963). Por otro lado, en la figura 14 se puede observar una comparación de los porcentajes de error calculadas a partir de las deflexiones presentadas en la tabla de resultados.

Adicionalmente, la metodología propuesta permite analizar la propagación de las grietas a medida que las vigas son cargadas. En este sentido, además de realizar el cálculo de las deflexiones instantaneas y evaluar si es que estan cumplen con los requisitos de los códigos de diseño, es posible verificar que tanto se agrietan los elementos. En este sentido, a

continuación se presenta el diagrama del sistema agrietado de la viga SB-3 en su estado último de carga. La viga fue modelada considerando su simetría

Figura 25: Viga SB-3 agrietada en su estado último de carga.
Elaboración propia

Figura 26: Porcentaje de error absoluto de cálculo de deflexiones.
Elaboración propia.

Tabla 2: Parámetros de ensayos. Elaboración propia

N°	Referencia	Viga	Longitud mm	Geometría				Propiedades del material			Módulo poisson	Área acero		Densidad kg/m³	Sobrecarg a kg/mm
				B mm	D mm	d mm	d' mm	f't Mpa	Ec Mpa	Es Mpa		As mm2	As' mm2		
1	Branson (1963)	SB-1	1371.60	101.60	127.00	101.60	0.00	3.72	3.03E+04	2.12E+05	0.2	70.97	0	2398.92467	0.06
2	Washa and Fluck (1952)	A1,A4	3048.00	203.20	304.80	257.05	47.75	3.12	2.07E+04	1.65E+05	0.2	851.6	851.6	2330.68602	0.42
3	Branson (1963)	SB-3	1371.60	101.60	127.00	101.60	0.00	3.72	3.03E+04	2.12E+05	0.2	213	0	2398.92467	0.0075
4	Washa and Fluck (1952)	B1,B4	3048.00	152.40	203.20	157.23	45.97	2.85	1.86E+04	1.68E+05	0.2	400	400	2306.65833	0.09
5	Washa and Fluck (1952)	C1,C4	3169.92	304.80	127.00	101.60	25.40	2.80	1.86E+04	1.68E+05	0.2	516.1	516.1	2306.65833	0.03
6	Washa and Fluck (1952)	D1,D4	1905.00	304.80	127.00	101.60	25.40	2.79	1.79E+04	1.61E+05	0.2	516.1	516.1	2306.65833	0.25
7	Washa and Fluck (1952)	B2,B5	3048.00	152.40	203.20	157.23	45.97	2.85	1.86E+04	1.68E+05	0.2	400	200	2306.65833	0.09
8	Washa and Fluck (1952)	C2,C5	3169.92	304.80	127.00	101.60	25.40	2.80	1.86E+04	1.68E+05	0.2	516.1	258.1	2306.65833	0.03
9	Washa and Fluck (1952)	D2,D5	1905.00	304.80	127.00	101.60	25.40	2.79	1.79E+04	1.61E+05	0.2	516.1	258.1	2306.65833	0.25
10	Washa and Fluck (1952)	A3,A6	3048.00	203.20	304.80	257.05	0.00	3.12	2.07E+04	1.65E+05	0.2	851.6	0	2330.68602	0.42
11	Washa and Fluck (1952)	B3,B6	3048.00	152.40	203.20	157.23	0.00	2.85	1.86E+04	1.68E+05	0.2	400	0	2306.65833	0.09
12	Washa and Fluck (1952)	C3,C6	3169.92	304.80	127.00	101.60	0.00	2.80	1.86E+04	1.68E+05	0.2	516.1	0	2306.65833	0.03
13	Washa and Fluck (1952)	D3,D6	1905.00	304.80	127.00	101.60	0.00	2.79	1.86E+04	1.68E+05	0.2	516.1	0	2306.65833	0.25

Tabla 3: Comparativo de resultados. Elaboración propia

N°	Referencia	Viga	Deflexión medida	Deflexión Newmark	Deflexión Inercia Efectiva	Deflexión M. Frágil	Medida vs Newmark	Medida vs Inercia Efectiva	Medida vs M.Frágil
			mm	mm	mm	mm	%	%	%
1	Branson (1963)	SB-1	1.04	1.27	1.27	1.22	18%	18%	15%
2	Washa and Fluck (1952)	A1,A4	13.46	15.49	15.75	13.94	13%	15%	3%
3	Branson (1963)	SB-3	0.1530	0.2030	0.2060	0.1437	75%	74%	106%
4	Washa and Fluck (1952)	B1,B4	23.37	25.15	25.15	26.53	7%	7%	12%
5	Washa and Fluck (1952)	C1,C4	40.13	44.45	44.45	46.30	10%	10%	13%
6	Washa and Fluck (1952)	D1,D4	11.94	16.00	16.00	15.82	25%	25%	25%
7	Washa and Fluck (1952)	B2,B5	24.89	25.91	25.91	26.08	4%	4%	5%
8	Washa and Fluck (1952)	C2,C5	43.43	44.70	44.96	45.49	3%	3%	5%
9	Washa and Fluck (1952)	D2,D5	14.22	16.26	16.51	16.19	13%	14%	12%
10	Washa and Fluck (1952)	A3,A6	17.02	16.76	16.76	17.02	-2%	-2%	0%
11	Washa and Fluck (1952)	B3,B6	26.42	25.91	25.91	26.90	-2%	-2%	2%
12	Washa and Fluck (1952)	C3,C6	47.75	46.48	46.23	45.74	-3%	-3%	-4%
13	Washa and Fluck (1952)	D3,D6	17.78	16.76	16.76	16.49	-6%	-6%	-8%

7 CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

7.1 Conclusiones

Se desarrolló el código de Elementos Finitos para la simulación del agrietamiento mediante el Enfoque Fijo del Modelo de Grietas Dispersas de la Mecánica de Fractura considerando la degradación del concreto. Para ello el cálculo de la matriz de rigidez permitió el desarrollo del código en Matlab para la simulación del problema pseudo-estático de agrietamiento mediante el Método Fijo de Grietas Dispersas y el Método de Elementos Finitos.

Se observaron resultados satisfactorios para el modelo computacional planteado al comparar las curvas fuerza-desplazamiento obtenidas en la presente investigación con lo expuesto por otros autores. El análisis evidenció que el modelo es capaz de calcular adecuadamente la capacidad pico en vigas de concreto reforzado y no reforzado, así como de presentar diagramas de propagación de grietas. Por otro lado, el modelo es capaz de simular adecuadamente el comportamiento de vigas de concreto armado ante cargas de servicio. Es decir, es capaz de predecir la deflexión y los patrones de grietas generados. Debido a ello, se plantea como una posibilidad el establecer más criterios de diseño para controlar el daño producido ante estados de servicio.

Sin embargo, debido a que se utilizó un modelo frágil para las grietas, la evaluación de la zona correspondiente a la degradación en las curvas fuerza-desplazamiento evidenció un decaimiento abrupto en la capacidad resistente de las vigas. Se puede superar esta limitación mediante la implementación de modelos constitutivos no-lineales en que permitan relacionar los esfuerzos y deformaciones en las grietas. Se observó que los resultados dependían de los enmallados propuestos. Este aspecto también podría superarse mediante el uso de modelos constitutivos no-lineales. Estos aspectos representan una oportunidad de mejora de la presente investigación. Se evidenció también que la metodología propuesta tiende a desarrollar inestabilidades propias de los modelos de degradación del material, ante lo cual se propone implementar modelos más sofisticados para el control de carga, e.g. el Método de Riks o el Método Generalizado por Control de Desplazamientos (Leon, Paulino, Pereira, Menezes, & Lages, 2012).

7.2 Recomendaciones

Se recomienda la implementación de un modelo constitutivo no-lineal que permita relacionar los esfuerzos y las deformaciones de manera más precisa. Ello puesto que se evidenció una degradación abrupta en la capacidad de las vigas analizadas. Por otro lado, se observó que los resultados dependían de los enmallados propuestos. Este es otro motivo por el cual se recomienda la implementación de modelos constitutivos no –lineales más complejos. Se evidenció también que la metodología propuesta tiende a desarrollar inestabilidades propias de los modelos de degradación del material, ante lo cual se propone implementar modelos más sofisticados para el control de cargas, e.g. el Método de Riks o el Método Generalizado por Control de Desplazamientos (Léon, Paulino, Pereira, Menezes y Lages, 2012).

8 BIBLIOGRAFÍA

- ADINA R. & D., Inc. (2019). *ADINA*. Recuperado el 15 de septiembre de 2019, de <http://www.adina.com/>
- Alnaas, W. (2016). *Nonlinear finite element analysis of quasi-brittle materials*. Doctoral Dissertation, Cardiff University, Cardiff. Recuperado el 14 de Abril de 2019, de https://www.researchgate.net/publication/309534115_Nonlinear_finite_element_analysis_of_quasi-brittle_materials
- American Concrete Institute, Committee 435. (2000). Control of deflection in concrete structures.
- American Concrete Institute, Committee 446.1R-91. (1992). Fracture Mechanics of Concrete Structures. *Elsevier Applied Science*, 1-140. Recuperado el 27 de Agosto de 2018, de <http://www.civil.northwestern.edu/people/bazant/PDFs/Papers/S25.pdf>
- American Concrete Institute, Committee 446.3R-97. (1997). Finite Element Analysis of Fracture in Concrete Structures: State-of-the Art: ACI 446.3R-97. *Farmington Hills, MI: American Concrete Institute*. Recuperado el 26 de Agosto de 2018, de http://civilwares.free.fr/ACI/MCP04/4463r_97.pdf
- Araújo, J. M. (2005). Improvement of the ACI method for calculation of deflections of reinforced concrete beams. *Teoría e Prática na Engenharia Civil*, 5(7), 49-60. Recuperado el 24 de Junio de 2019, de <http://repositorio.furg.br/handle/1/5130>
- Bazant, Z. P. (1976). Instability, Ductility and Size Effect in Strain-Softening Concrete. *Journal of the Engineering Mechanics Division*, 16(3), 331-344. Recuperado el 24 de Agosto de 2018, de <https://pdfs.semanticscholar.org/6194/b4bb60fe5951988d6d50239e55af82b8b1a8.pdf>
- Bazant, Z., & Oh, B. (1983). Crack band theory for fracture of concrete. *Materials and Structures*, 100(2), 155-177. doi:10.1007/BF02486267
- Bittencourt, T., Menin, R., & Trautwein, L. (2009). Smeared Crack Models for Reinforced Concrete Beams by Finite Element Method. *Ibracon Structures and Materials Journal*, 2, 166-200. Recuperado el 10 de Septiembre de 2018, de http://www.scielo.br/pdf/riem/v2n2/en_04.pdf

- Blaauwendraad, J., & Rots, J. (1989). Crack Models for Concrete: Discrete or Smeared? Fixed, Multi-Directional or Rotating? *Heron*, 34(1), 1-59. Recuperado el 16 de Agosto de 2018, de <http://heronjournal.nl/34-1/1.pdf>
- Blaauwendraad, J., Kuster, G., Nauta, P., & Rots, J. (1985). Smeared Crack Approach and Fracture Localization in Concrete. *Heron*, 30(1), 1-48. Recuperado el 16 de Agosto de 2018, de <https://repository.tudelft.nl/islandora/object/uuid%3A746aba89-3566-4ade-9931-d6bbae0c05ea>
- Branson, D. E. (Agosto de 1963). *Instantaneous and Time-Dependent Deflections of Simple and Continous Reinforced Concrete Beams*. Recuperado el 5 de Junio de 2019, de <http://www.eng.auburn.edu/files/centers/hrc/instantaneous-branson2.pdf>
- Cai, Q. (2007). *Finite Element Modelling of Cracking in concrete*. Tesis doctoral, University of Pretoria, Civil Engineering. Recuperado el 10 de 04 de 2019, de <https://repository.up.ac.za/bitstream/handle/2263/25973/Complete.pdf?sequence=10&isAllowed=y>
- Červenka Consulting. (2019). *Atena versión 5.6 info*. Recuperado el 15 de Septiembre de 2019, de <https://www.cervenka.cz/products/atenal/>
- Crisfield, M., & Wills, J. (1988). Solution strategies and softening materials. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 66, 267-289. doi:[https://doi.org/10.1016/0045-7825\(88\)90002-3](https://doi.org/10.1016/0045-7825(88)90002-3)
- Dassault Systemes. (2019). *ABAQUS*. Recuperado el 15 de Septiembre de 2019, de <https://www.3ds.com/es/productos-y-servicios/simulia/productos/abaqus/>
- de Borst, R. (1987). Computation of post-bifurcation and post-failure behavior of strain-softening solids. *Computers & Structures*, 25(2), 211-224. doi:10.1016/0045-7949(87)90144-1
- de Borst, R., & Nauta, P. (1985). Non-orthogonal cracks in a smeared finite element model. *Engineering Computations*, 2(1), 35-46. doi:doi.org/10.1108/eb023599
- de Borst, R., Crisfield, M., Remmers, J., & Verhoosel, C. (2012). *Non-Linear Finite Element Analysis of Solids and Structures*. Chichester, West Sussex: John Wiley & Sons Ltd.

- DIANA FEA BV. (2019). *DIANA FEA for Civil and Geotechnical Engineers*. Recuperado el 15 de Septiembre de 2019, de <https://dianafea.com/es>
- Edalat-Behbahani, A., Barros, J., & Ventura-Gouveia, A. (2017). Three-dimensional plastic-damage multidirectional fixed smeared crack approach for modelling concrete structures. *International Journal of Solids and Structures*, 1, 104-125. doi:10.1016/j.ijsolstr.2017.03.006
- Gribniak, V., & Kaklauskas, G. (2014). Improving the Deflection Prediction Model from ACI 318. *ACI Structural Journal*, 1491-1496. doi:10.14359/51687167
- Hillerborg, A. M.-E. (1976). Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements. *Cement and Concrete Research*, 6(6), 773-781.
- Hillerborg, A., Modr, M., & Petersson, P.-E. (1985). Numerical methods to simulate softening and fracture of concrete. *Fracture mechanics of concrete: Structural application and numerical calculation*, 4, 141-170. doi:10.1016/0008-8846(76)90007-7
- Kormeling, H. A., & Reinhardt, H. W. (1983). *Determination of the fracture energy of normal concrete and epoxy modified concrete*. Delf University of Technology, Stevin Laboratory, Delf, The Netherlands.
- Kormeling, H. W., & Reinhardt, H. A. (s.f.). *Determination of*.
- Kuna, M. (2013). Basics of Fracture Mechanics. En *Finite Elements in Fracture Mechanics: Theory-Numerics-Applications* (pgs. 21-151). En Gladwell, G.M.L. Editor (Eds).
- Leon, S., Paulino, G., Pereira, A., Menezes, I., & Lages, E. (2012). "A Unified Library of Nonlinear Solution Schemes". *ASME. Appl. Mech. Rev*, 64(4).
- McCormac, J., & Brown, R. (2011). *Diseo de concreto reforzado*. Alfaomega.
- Multi-hazard Approach to Engineering Center. (2013). *ZEUS-NL*. Recuperado el 15 de Septiembre de 2019, de http://mae.cce.illinois.edu/software/software_zeusnl.html

- Öchsner, A., & Merkel, M. (2018). Nonlinear Elasticity. En One-Dimensional Finite Elements. En *One-Dimensional Finite Elements* (págs. 229-268). Berlin: Springer. doi:10.1007/978-3-642-31797-2_10
- Petersson, P.-E. (1981). *Crack growth and development of fracture zones in plain concrete and similar materials*. Doctoral Dissertation, National Swedish Board for Technical Development, Lund. Recuperado el 21 de Agosto de 2018, de https://inis.iaea.org/collection/NCLCollectionStore/_Public/13/668/13668228.pdf
- Przemieniecki, J. (1968). *Theory of Matrix Structural Analysis*. McGraw-Hill Book Company: Nueva York.
- Rashid, Y. (1968). Analysis of prestressed concrete pressure vessels. *Nuclear*, 7(4), 334-344. doi:10.1016/0029-5493(68)90066-6
- Reddy, J. N. (2002). *Energy principles and variational methods in applied mechanics*.
- Reddy, J. N. (2006). *An Introduction to the Finite Element Method* (3ra. ed.). Nueva York: McGraw- Hill Education.
- Reddy, J. N. (2016). *An Introduction to Nonlinear Finite Element Analysis: with applications to heat transfer, fluid mechanics, and solid mechanics* (2da. ed.). Nueva York: Oxford University Press.
- Rijkswaterstaat Ministry of Infrastructure and the Environment. (2017). “*Guidelines for Nonlinear Finite Element Analysis of Concrete Structures*”.
- Rots, J. (1988). *Computational Modeling of Concrete Fracture. (Tesis doctoral)*. Doctoral Dissertation, Delft University of Technology, Netherlands. Recuperado el 14 de Agosto de 2018, de <https://repository.tudelft.nl/islandora/object/uuid%3A06985d0d-1230-4a08-924a-2553a171f08f>
- Scanlon, A. (1971). *Time dependent deflections of reinforced concrete slabs. (Tesis doctoral)*. Edmonton: University of Alberta. doi:10.7939/R3SC49
- Sena Cruz, J., Barros, J., & Azevedo, Á. (2006). *Elasto-plastic multi-fixed smeared crack model for concrete*. Braga: Universidad de Minho. Recuperado el 22 de Agosto de 2018, de

http://www.civil.uminho.pt/composites/Publications/2004/TR2004_001_04-DEC-E-05.pdf

- Srinivasan, R., & Sathiya, K. (2010). Flexural behavior of reinforcement concrete beams using Finite Element Analysis (Elastic Beams). *Boletin del instituto tecnológico de DIN IAȘI*.
- Sucharda, O., & Brožovský, J. (2011). Models for Reinforcement in Final Finite Element Analysis of Structures. *Civil engineering series, 11*.
- U.C. Regents. (2006). *OpenSees*. (OpenSees) Recuperado el 15 de Septiembre de 2019, de <http://opensees.berkeley.edu/index.php>
- VecTor Analysis Group. (2019). *VecTor Analysis Group*. Recuperado el 15 de Septiembre de 2019, de <http://www.vectoranalysisgroup.com/software.html>
- Walraven, J. C. (1978). *The influence of depth on the shear strength of lightweight concrete beams without shear reinforcement*. Delf University of Technology, Stevin Laboratory, Delf, The Netherlands.
- Washa, G., & Fluck, P. (1952). "The Effect of Compressive Reinforcement on the Plastic Flow of Reinforced Concrete Beams". *ACI Journal*, 9(8), 89-108.
- Zienkiewicz, O., & Taylor, R. (1994). *El método de los elementos finitos: formulación básica y problemas lineales*. REVERTÉ.

ANEXOS

ANEXO A.1

ANEXO A.2

ANEXO A.3

ANEXO A.4

ANEXO A.5

ANEXO A.6

ANEXO A.7