Matemática Básica para Administradores

Agustín Curo Cubas y Mihály Martínez Miraval

Matemática Básica para Administradores

Tercera edición

Lima, agosto de 2016

Agustín Curo Cubas y Mihály Martínez Miraval

© Universidad Peruana de Ciencias Aplicadas (UPC)

Tercera publicación: agosto de 2016

Impreso en el Perú - *Printed in Peru*

Corrección de estilo: Jessica Vivanco L. / André Maguiña

Diseño de cubierta: Christian Castañeda

Diagramación: Diana Patrón Miñán

Editor del proyecto editorial

Universidad Peruana de Ciencias Aplicadas S.A.C.

Av. Alonso de Molina 1611, Lima 33 (Perú)

Teléf: 313-3333

www.upc.edu.pe

Primera edición: marzo de 2013

Segunda edición: julio de 2014

Tercera edición: agosto de 2016

Tiraje: 1200 ejemplares

Este libro se terminó de imprimir en el mes de agosto de 2016 en los talleres gráficos de Gráfica Biblos S.A. ubicados en Jirón Morococha 152, Surquillo, Lima – Perú.

BIBLIOTECA NACIONAL DEL PERÚ
Centro Bibliográfico Nacional

510.711 Curo, Agustín, 1963-
C97 Matemática básica para administradores / Agustín Curo Cubas y Mihály
2016 Martínez Miraval.-- 3a ed.-- Lima : UPC, 2016 (Lima : Gráfica Biblos).
522 p. ; 21 cm.

D.L. 2016-09663
ISBN

1. Matemáticas – Estudio y enseñanza (Educación superior) 2. Matemáticas – Problemas, ejercicios, etc. 3. Ecuaciones – Problemas, ejercicios, etc. I. Martínez, Mihály, 1977- II. Universidad Peruana de Ciencias Aplicadas III. Título

BNP: 2016-137

Hecho el Depósito Legal en la Biblioteca Nacional del Perú nro. 2016-09663

Registro de Proyecto Editorial en la Biblioteca Nacional del Perú nro. 31501401600796

Todos los derechos reservados. Esta publicación no puede ser reproducida, ni en todo ni en parte, ni registrada en o transmitida por un sistema de recuperación de información, en ninguna forma ni por ningún medio, sea mecánico, fotoquímico, electrónico, magnético, electroóptico, por fotocopia o cualquier otro, sin el permiso previo, por escrito, de la editorial.

El contenido de este libro es responsabilidad de los autores y no refleja necesariamente la opinión de los editores.

Contenido

Prólogo	7
Introducción	9
Unidad 1: Introducción a la lógica	13
1.1. Lógica proposicional	14
1.2. Análisis de argumentos	23
1.3. Estrategias y resolución de problemas	33
1.4. Conjunto de los números reales. Ecuaciones	46
1.5. Ecuación de segundo grado. Ecuación polinómica	56
1.6. Ecuaciones racionales e irracionales reducibles a ecuaciones de primer y segundo grado	67
1.7. Aplicaciones de ecuaciones de primer y segundo grado	78
1.8. Logaritmos	90
1.9. Aplicaciones de las exponenciales y logaritmos al interés compuesto	96
1.10. Sistema de ecuaciones de dos variables	103
1.11. Intervalos e inecuaciones de primer grado	113
1.12. Inecuaciones polinomiales y racionales	128
Unidad 2: Matrices	141
2.1. Definición. Tipos y operaciones básicas	142
2.2. Aplicaciones de operaciones con matrices	158
2.3. Sistema de ecuaciones lineales. Determinantes y la regla de Cramer	165
2.4. Sistema de ecuaciones lineales. Método de reducción de matrices	172
2.5. Aplicaciones de sistemas de ecuaciones lineales	181
Unidad 3: Gráfica de ecuaciones en el plano	189
3.1. Sistema de coordenadas rectangulares	191
3.2. Ecuación de la recta	198
3.3. Aplicaciones de rectas	213
3.4. Desigualdades en dos variables	222
3.5. Programación lineal	236

Unidad 4: Funciones reales de variable real	251
4.1. Funciones	252
4.2. Gráfica de funciones	263
4.3. Lectura de gráficas	276
4.4. Transformaciones gráficas de funciones	290
4.5. Aplicaciones de la función lineal y las transformaciones de gráficas	306
4.6. Función cuadrática	315
4.7. Función polinomial	326
4.8. Aplicaciones de funciones polinomiales. Optimización	335
4.9. Ajuste de curvas	342
4.10. Razón de cambio promedio, variación porcentual y aplicaciones	352
4.11. Aplicaciones: Elasticidad, precio de la demanda	362
4.12. Operaciones con funciones	373
4.13. Composición de funciones	383
4.14. Aplicaciones de las operaciones con funciones	395
4.15. Función inversa. Relación implícita	402
4.16. Aplicaciones de la función inversa y la relación implícita	416
 Unidad 5: Función exponencial y logarítmica	 423
5.1. Función exponencial	424
5.2. Función logarítmica	436
5.3. Ecuaciones exponenciales y logarítmicas	447
5.4. Aplicaciones de funciones exponenciales	453
 Respuestas	 465
Bibliografía	519

| Prólogo

Matemática básica para administradores es un libro que se enfoca en desarrollar una forma diferente de enseñar el curso inicial de Matemática a los futuros administradores. En este libro, los autores ponen en práctica la innovadora idea que tienen para hacer que los alumnos participen de manera activa en el desarrollo de las clases.

La gran dificultad de los estudiantes en el aprendizaje de la matemática a nivel universitario es el reto más importante con el que los profesores deben actualmente lidiar. ¿Por qué los alumnos tienen tanta dificultad para aprender matemática a nivel universitario? Esta es la gran pregunta que los docentes han tratado de responder desde hace mucho tiempo. Este libro no espera dar respuesta a esta pregunta, sino que plantea una solución y esta es que el alumno sea un participante activo de su propio aprendizaje, interiorizando la filosofía educativa de la Universidad Peruana de Ciencias Aplicadas (UPC).

Los profesores Agustín Curo y Mihály Martínez han logrado plasmar en este libro toda su experiencia en la docencia universitaria y —con el apoyo de todos aquellos profesores que de una u otra forma colaboraron con la maduración del curso que se dicta en la UPC— han logrado redondear un conjunto de ejercicios que muestran toda su intención de que el estudiante logre obtener los resultados esperados. Todos los profesores que han dictado el curso de Matemática Básica para Administración se han desatado por su preocupación constante en el nivel de aprendizaje que deben lograr los estudiantes de las carreras de Administración y, a través de una metodología participativa, han sido capaces de atraer la atención de los alumnos en la resolución de problemas de matemática.

El presente libro es una prueba de lo importante que es hacer participar al estudiante en su propio proceso de aprendizaje. Los profesores Curo y Martínez, a través de ejercicios y problemas, logran captar la atención de sus alumnos y así desarrollar una técnica de enseñanza que obtiene mejores resultados a medida que el estudiante se identifica con la necesidad de su propio involucramiento en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

Matemática básica para administradores es un libro que brindará a los estudiantes una herramienta muy positiva para incrementar los resultados que puedan lograr en el curso. Sin duda alguna, este libro será fundamental para mejorar los resultados hasta hoy obtenidos tanto dentro como fuera de la UPC.

Fernando Sotelo
Director del Área de Ciencias
Universidad Peruana de Ciencias Aplicadas

Introducción

La presente obra tiene por objetivo ayudar al alumno en su camino al aprendizaje de la matemática básica. Los contenidos que la conforman son los que normalmente se desarrollan en un primer curso para los estudiantes de Administración y Negocios, y van desde una introducción a la lógica de proposiciones y análisis de argumentos, transitando por el álgebra elemental y las matrices, hasta las funciones reales de variable real, concluyendo con las funciones exponenciales y logarítmicas. Esperamos que le sea útil al autor no solo como un manual de ejercicios, sino como una guía teórico-práctica que le permita entender los conceptos sobre los que se fundamenta cada tema y aplicar lo aprendido a sus análisis administrativos.

Todos los temas tratados aquí tienen una estructura similar de aprendizaje que consta de tres partes muy marcadas e importantes: la base teórica, el cálculo algebraico y geométrico, y la modelación y resolución de problemas de situaciones del contexto real en el ámbito de administración.

Una de las piezas fundamentales de nuestra obra es la base teórica sobre la que descansa cada tema tratado. En ella, aunque de manera breve, se justifican los procedimientos realizados para la obtención de resultados; el análisis de los errores cometidos; el porqué de las operaciones realizadas, de la discriminación de soluciones, de la interpretación de resultados; etcétera.

Otra parte elemental de nuestra obra es la referida al cálculo algebraico y al geométrico. Los diversos ejemplos planteados en el libro permiten realizar operaciones elementales que poco a poco irán desarrollando la destreza en el cálculo. Los ejemplos planteados no se han concebido bajo la idea de aumentar la complejidad de ellos de modo abstracto, sino de crear ejemplos que al resolverlos desarrollen diferentes tipos de razonamientos que involucren el conocimiento de otros conceptos, para así evitar cálculos engorrosos. El cálculo algebraico, debido a su amplitud, permite encontrar diferentes caminos y procedimientos para obtener una solución, pero enfocar dicho cálculo bajo un aspecto geométrico genera otro tipo de habilidades sumamente importantes, sobre todo, referidas a la interpretación. Por ejemplo, plantear una ecuación lineal en dos variables cobra vida cuando se le asocia a la gráfica de una recta en el plano y, eso no es todo, al enfocar la gráfica de la recta como una función lineal se pueden apreciar visualmente sus diferentes características. En este libro se presentan distintos métodos de graficación y de interpretación gráfica, de modo que constantemente se puede transitar entre diferentes registros de representación, lo que permitirá a los lectores una mejor comprensión de la información en cada tema tratado.

La modelación de problemas de situaciones reales en el ámbito de administración es también uno de los aportes de este libro de trabajo. Se han adaptado en el libro todos los temas matemáticos, de naturaleza abstracta, a situaciones del contexto real. Los problemas de modelación planteados utilizan conceptos estudiados en los cursos de las carreras de Administración y Negocios. Entre ellos destacan los conceptos de costos, ingresos, utilidades, oferta, demanda, impuestos, elasticidad, etc. La riqueza de estos problemas se basa en poder aplicar la matemática a situaciones reales en las cuales se entrelacen la teoría matemática, el enfoque algebraico, la interpretación gráfica y los conceptos administrativos, siendo el principal objetivo que los lectores analicen situaciones y basen sus resultados dentro del dominio de la matemática.

Muchos de los temas aquí desarrollados siguen una secuencia lógica que se puede encontrar en cualquier otro texto de la misma naturaleza, sin embargo, en algunos temas se ha creído conveniente cambiar el orden sin alterar el orden lógico de los mismos. Por ejemplo, el tema de determinantes y la regla de Cramer se presenta antes del desarrollo de sistemas de ecuaciones lineales (SEA) por el método de la eliminación de Gauss. Esto tiene una explicación, la regla de Cramer solo resuelve cierto tipo de sistemas de ecuaciones lineales mientras que el método de eliminación Gauss resuelve todos estos sistemas.

Por otro lado, se han incorporado al inicio algunos aspectos fundamentales de la lógica que ayudarán al estudiante a entender los conectivos lógicos más usados y sus valores de verdad para obtener proposiciones equivalentes, y las reglas básicas de inferencia lógica para utilizarlas adecuadamente a entender la lectura de un problema, analizar argumentos y hacer conclusiones válidas a partir de ciertas premisas.

La forma como se presentan los contenidos de cada tema y el modo de guiar a los lectores en la resolución de los ejemplos y de los problemas planteados son fruto de los estudios, experiencia, reuniones constantes de discusión e intercambio de ideas de los autores; es también consecuencia de los diálogos y críticas constructivas de los docentes del curso de Matemática Básica para administradores de la Universidad Peruana de Ciencias Aplicadas, así como de los materiales de clase desarrollados por ellos y por los autores. Todo esto permitió desarrollar un libro de matemática que escapa del tradicional libro teórico y aplicativo.

Características pedagógicas

En cada sección se ha tratado de incorporar, en la medida de lo posible, el modelo pedagógico de la Universidad, que es el modelo MATE: motivación, adquisición, transferencia y evaluación. En las definiciones y en cada explicación de conceptos, resolución de ejemplos y problemas, se ha hecho un esfuerzo por utilizar un lenguaje sencillo cercano al estudiante, justificando cada paso, incorporando métodos constructivos y reflexivos en el aprendizaje. Los ejemplos están presentados en orden creciente de dificultad y variados. Se destaca en la obra la forma como se estructuran los problemas. Cada tema empieza con un ejemplo desarrollado en el que se explican los conceptos involucrados en la resolución; luego, se plantea otro ejemplo en el que el lector va siendo guiado por el mismo libro en su desarrollo. El objetivo es que el estudiante aprenda a resolver ejemplos de forma ordenada, racional y que, en ese proceso, sienta un libro amigable que promueva el aprendizaje autónomo. En la mayor parte de la obra, se ha tratado de cerrar un bloque con una sección de aplicaciones.

En esta tercera edición, se han incorporado algunos ejemplos y actividades colaborativas. Además, esta edición cuenta con una sección dedicada a ajuste de curvas y cada unidad cuenta con un texto introductorio.

Reconocimientos

Deseamos expresar nuestro agradecimiento a los siguientes profesores con quienes compartimos el dictado del curso de Matemática Básica (ADM) de la Universidad Peruana de Ciencias Aplicadas en estos últimos años y que aportaron con sus comentarios, críticas constructivas, y en la resolución y comprobación de soluciones de los ejercicios que han sido valiosos en el desarrollo del curso: Edith

Giovanna Arce Cortez, Luis Leoncio Barboza Carape, Mónica Luz Cabrera Ortega, Raúl Chávez Aquino, Reynaldo Hugo Cortez Zevallos, Alejandro Wálter de la Cruz Sánchez, Gloria Angélica Elena Espinoza Colán de Herrera, Jairo Yamil Esquivel Ortiz, Luis Demetrio Fernández Basaldua, Marie Cosette Girón Suazo, Magna Julia Guerrero Celis, Jorge Luis Guzmán Aguilar, Juan Guillermo Herrera García, Nelly Kau Kau, Johnny Alberto Malaver Ortega, David Alberto Maldonado Carrasco, Hortensia Mamani Cosco, Renzo Patricio Mere Donayre, Fernando Damián Montesinos Andreses, Armando Alfredo Novoa Allagual, Eduardo Ortiz Chauca, Aldrín Ethel Peña Lizano, Erick Jozsef Pozsgai Hernani, Jorge Humberto Prado Linares, Óscar Reynaga Alarcón, Claudio Felipe Ríos Ibarra, Juan de Dios Saavedra Farfán, David Sáenz López, Jorge Raul Silva Santisteban Chero, Ángel Felipe Soto Valdivia, Mario Saúl Tiza Domínguez, Alberto Uchasara Quispe, Carlos Eleodoro Valencia Segura, Cecilia Lina Vidal Castro y Edwin Villogas Hinostroza.

Queremos agradecer también a nuestros revisores Marie Cosette Girón Suazo, Erick Jozsef Pozsgai Hernani y Héctor Viale Tudela, por sus contribuciones en esta obra. Un agradecimiento muy especial a los profesores Gloria Angélica Elena Espinoza Colán de Herrera y Juan Guillermo Herrera García, quienes desde un inicio estuvieron apoyándonos y colaborando de manera muy estrecha disponiendo de su valioso tiempo; al profesor Jorge Luis Guzmán Aguilar por su importante aporte en las secciones de Lógica y al profesor Erick Jozsef Pozsgai Hernani por su revisión minuciosa y sugerencias detalladas.

Finalmente, queremos agradecer a Fernando Sotelo Raffo, director del Área de Ciencias de la Universidad, por su confianza y la oportunidad de hacer realidad esta obra, asimismo, agradecemos a los colegas profesores a tiempo completo de Matemática del Área de Ciencias por su apoyo.

Unidad 1: Introducción a la lógica

Entre los historiadores de la lógica se otorga a Aristóteles, por tradición, el título de padre de esta disciplina.

Aristóteles nació en Estagira (actual Stavros), Macedonia, hacia los años 386, 385 o 384 a. C. Aristóteles fue discípulo de Platón y de otros pensadores como Eudoxo durante los veinte años que estuvo en la Academia.

Los tratados de lógica de Aristóteles (384-332 a. C.), conocidos como *Organón*, contienen el primer tratamiento sistemático de las leyes de pensamiento en relación con la adquisición de conocimiento. Estos tratados representan el primer intento de establecer a la lógica como ciencia. Aristóteles da una clasificación de todos los conceptos o nociones (sustancias, cantidad, relación, acción, pasión, diferencia, propiedad y accidente) y trata las reglas del razonamiento silogístico.

Aristóteles

En palabras de Descartes «el silogismo es una forma de razonamiento deductivo que puede aplicarse siempre que se disponga de una verdad general, esto es, de una premisa mayor. Consta, en efecto, de dos premisas: una mayor —que enuncia el principio general— y una menor —que se refiere al caso particular incluido en el principio general—. De ambas premisas se extrae una conclusión, que es la nueva verdad que interesa. Repitamos una vez más el ejemplo ofrecido por Aristóteles: ‘Todos los hombres son mortales’ (premisa mayor, que enuncia el principio general); ‘Sócrates es hombre’ (premisa menor); ‘Sócrates es mortal’ (conclusión). Sin la premisa mayor no es posible construir un silogismo» (Descartes 2011: 15-16).

Según Kant, «la lógica ha llevado ya esa marcha segura desde los tiempos más remotos, puede colegirse, por el hecho de que, desde Aristóteles, no ha tenido que dar un paso atrás a no ser que se cuenten como correcciones la supresión de algunas sutilezas inútiles o la determinación más clara de lo expuesto, cosa empero que pertenece más a la elegancia que a la certeza de la ciencia. Notable es también en ella el que tampoco hasta ahora hoy ha podido dar un paso adelante. Así pues, según toda apariencia, hállese conclusa y perfecta» (Kant 2003: 7).

Referencias bibliográficas

DESCARTES, René (2011) *Discurso del método*. 3ª ed. Madrid: Alianza Editorial.

KANT, Immanuel (2003) *Crítica a la razón pura* (consulta: 21 de junio de 2016) (<http://www.biblioteca.org.ar/libros/89799.pdf>).

El estudio de la lógica de proposiciones ha venido a menos en estos últimos tiempos. En las escasas oportunidades en que se desarrolla, se realiza enfatizando en la parte algebraica de la determinación de valores de verdad o simplificando expresiones proposicionales complejas. Poco se detiene en el estudio reflexivo de los conectivos lógicos, las expresiones proposicionales equivalentes, la aplicación correcta de las reglas de inferencia. Por ejemplo, sean las siguientes expresiones:

- No es cierto que voy a la biblioteca o a la cafetería.
- No voy a la biblioteca o no voy a la cafetería.

¿Son equivalentes estas expresiones? En esta sección se hace un estudio elemental de las proposiciones, los conectivos y sus valores de verdad, y las proposiciones equivalentes.

1.1. Lógica proposicional

Un enunciado es toda frase u oración que se utiliza en el lenguaje común. Algunos enunciados son afirmaciones, órdenes, interrogaciones, exclamaciones, etcétera.

Ejemplo 1

- a. La UPC tiene más de 15 000 estudiantes.
- b. ¡Feliz aniversario!
- c. La tolerancia para ingresar al aula de clase en la universidad es de 15 minutos.
- d. ¿Cuál es la nota mínima para aprobar un curso en la universidad?
- e. Prohibido fumar en clase.
- f. Esta proposición es falsa.

Una proposición es un enunciado que puede ser calificado, o bien como verdadero o bien como falso, pero no ambos a la vez.

Ejemplo 2

- a. La inflación del Perú en el año 2011 fue menor al 3%.
- b. Ya se firmó el TLC entre Perú y Japón.
- c. La economía se divide en microeconomía y macroeconomía.
- d. Hoy estudio para el examen de Matemática y escucho música instrumental.
- e. Voy a la biblioteca o a la cafetería.
- f. Si el precio del producto es mayor al precio de equilibrio, entonces hay exceso de oferta.

Ejemplo 3

Indique con un check los enunciados que sean proposiciones:

a. ¿Usted habla italiano?	_____
b. Prohibido fumar en lugares públicos como este.	_____
c. Toda ecuación cuadrática tiene dos soluciones reales.	_____
d. La captura del terrorista Abimael Guzmán fue en el año 2000.	_____
e. A quien madruga Dios le ayuda.	_____
f. Dios es misericordioso.	_____
g. En un monopolio, los precios de los artículos suben.	_____
h. El PBI crecerá 5,4% durante el periodo 2011-2012.	_____
i. Esta proposición es falsa.	_____

Las proposiciones simples son aquellas que tienen un solo componente, es decir, no se pueden separar en dos proposiciones. Se les denota con las letras minúsculas p , q , r , etcétera. A la verdad (V) o falsedad (F) de la proposición se le llama valor de verdad.

Por ejemplo, las proposiciones:

- La inflación del Perú en el año 2011 fue menor al 3%.
- Ya se firmó el TLC entre Perú y Japón.
- La economía se divide en microeconomía y macroeconomía.

son simples, ya que expresan una sola idea. A estas proposiciones se les puede simbolizar así:

p : La inflación del Perú en el año 2011 fue menor al 3%

q : Ya se firmó el TLC entre Perú y Japón.

r : La economía se divide en microeconomía y macroeconomía.

Una proposición compuesta es aquella que está formada por dos o más proposiciones simples, llamadas componentes de la proposición compuesta. Estas proposiciones simples están unidas o relacionadas por no, y, o, si..., entonces..., etcétera, llamados conectivos o conectores.

Por ejemplo, las siguientes proposiciones:

- Hoy estudio para el examen de Matemática y escucho música instrumental.
- Voy a la biblioteca o a la cafetería.
- Si el precio del producto es mayor al precio de equilibrio, entonces hay exceso de oferta.

están formadas por dos proposiciones simples, la primera: «Hoy estudio para el examen de Matemática» y «hoy escucho música instrumental», separadas por el conector *y*; la segunda: «Voy a la biblioteca» o «voy a la cafetería», separadas por el conector *o*; la tercera: Si «el precio del producto es mayor al precio de equilibrio», entonces «hay exceso de oferta», separadas por el conector *entonces*.

Sin embargo, existen proposiciones que dan la impresión de ser compuestas, pero no lo son, porque no se pueden separar en dos proposiciones simples, tal es el caso de la siguiente proposición:

Alicia y Juan son hermanos.

Ahora considere la proposición «El promedio ponderado de mis cursos es mayor que 15». La negación se obtiene intercalando la palabra *no* o anteponiendo la expresión *no es cierto que* en la proposición, así:

«El promedio ponderado de mis cursos *no* es mayor que 15», o

«*No es cierto que* el promedio ponderado de mis cursos es mayor que 15».

La negación de una proposición verdadera es falsa y la negación de una proposición falsa es verdadera.

Conectivos lógicos

Para simplificar el estudio de las proposiciones lógicas, se utilizan símbolos para los conectivos lógicos, los cuales se muestran en la tabla:

Proposición	Conectivo	Símbolo	Significado
Negación	No	$\sim$	Cambia el valor de verdad de una proposición simple.
Conjunción	y	$\wedge$	Indica que se deben dar las dos proposiciones.
Disyunción inclusiva (Débil)	o	$\vee$	Indica que se debe dar una de ellas o ambas proposiciones a la vez.
Disyunción exclusiva (Fuerte)	o... o	Δ	Indica que se debe dar una de ellas pero no ambas proposiciones a la vez.
Condicional	Si..., entonces	$\rightarrow$	Indica en las proposiciones una relación de causa-efecto.
Bicondicional	Si y solo si	$\leftrightarrow$	Indica que se da una relación de causa-efecto y viceversa.

Formalización de proposiciones lógicas

Es el procedimiento mediante el cual se identifican proposiciones simples y conectivos lógicos que se enlazan formando fórmulas organizadas con signos de agrupación.

Ejemplo 4

Sean las proposiciones:

p : Voy a la biblioteca.

q : Voy a la cafetería.

Formalice las siguientes proposiciones:

- Voy a la biblioteca o voy a la cafetería.
- Voy a la biblioteca y voy a la cafetería.
- Si voy a la biblioteca, entonces voy a la cafetería.
- No voy a la biblioteca.
- O voy a la biblioteca o voy a la cafetería.
- Voy a la biblioteca si y solo si voy a la cafetería.

$p \vee q$

A continuación, se presenta una tabla con algunos términos del lenguaje natural que designan conectivos equivalentes a los mencionados anteriormente.

Proposición	Término	Formalización
Negación	No p Es falso que p Es absurdo que p	$\sim p$
Conjunción	p pero q p aunque q p sin embargo q p y q	$p \wedge q$
Disyunción inclusiva (Débil)	p a menos que q p salvo que q p excepto q p o q	$p \vee q$
Disyunción exclusiva (Fuerte)	O p o q p o solamente q p o únicamente q	$p \Delta q$
Condicional	p entonces q Si p , q p implica q p por lo tanto q p es suficiente para q q si p q porque p q es necesaria para p	$p \rightarrow q$
Bicondicional	p si y solo si q p siempre y cuando q p equivale a q	$p \leftrightarrow q$

Ejemplo 5

Formalice las siguientes proposiciones:

- a. La utilidad marginal es positiva, pero disminuye conforme aumenta el consumo.

Simbolizando cada proposición simple se tiene:

p : La utilidad marginal es positiva.

q : La utilidad marginal disminuye conforme aumenta el consumo.

Formalización: $p \wedge q$

- b. Cuando aumenta el precio de un bien, disminuye la cantidad demandada del mismo.

- c. La utilidad total aumenta a menos que aumente el costo fijo.

- d. El costo promedio disminuye salvo que el nivel de producción no aumente.

- e. Subió el precio de las verduras porque subió la gasolina.

- f. No es cierto que hoy es martes y hay reunión de coordinación de curso.

Ejemplo 11

Considere la siguiente proposición:

«Si la demanda de un bien aumenta, entonces el precio del bien aumentará; salvo que, si la crisis económica continúa, entonces habrá más pobreza».

- a. Formalice la proposición compuesta.

- b. Analice el valor de verdad de la proposición, asumiendo que todas las proposiciones simples son verdaderas.

- c. ¿Cuál es el valor de verdad de la proposición si la demanda del bien no aumenta y no hay más pobreza?

- d. ¿Cuál es el valor de verdad de la proposición si la crisis no continúa ni el precio del bien aumenta?

Ejercicios 1.1

- Determine qué enunciados son proposiciones. Luego, clasifíquelas como simples o compuestas y formalice.
 - El pisco es peruano.
 - Prohibido fumar en lugares públicos como este.
 - $3 + 5 > 7$
 - Alemania y China son potencias económicas.
 - Estados Unidos y México son países fronterizos.
 - Es falso que Arequipa sea un país y Cuzco su capital.
 - La familia promueve el bienestar, aunque también la prosperidad de todos sus miembros.
 - Seré un profesional de éxito porque estudio en esta universidad.
 - Si la carne de avestruz es cara, su crianza no tiene razón de ser.
 - El que tengamos un amplio intercambio comercial con Europa conlleva a que nos afecte su crisis financiera.
 - En la medida que estudies, triunfarás.
 - Es falso que si la importación afecta la inversión interna, el crecimiento poblacional afectará al PBI.
 - La jalea real es el alimento especial de las abejas reinas o solo de las obreras.
- Suponga que p y r son falsas y q es verdadera. Halle el valor de verdad de las siguientes proposiciones:
 - $(\sim p \wedge \sim q) \rightarrow (p \wedge \sim r)$
 - $(p \rightarrow \sim q) \rightarrow (\sim p \wedge \sim r)$
 - $(p \rightarrow \sim q) \wedge (p \rightarrow r)$
- Si $(\sim p \wedge \sim q)$ es verdadera, halle el valor de verdad de $[(p \vee \sim q) \rightarrow (\sim p \vee q)]$
- Halle el valor de verdad de las proposiciones p, q, r y s , sabiendo que:
 - $[(r \vee p) \wedge \sim q] \rightarrow p$ es falsa
 - $(s \wedge p) \vee [(p \rightarrow q) \vee \sim r]$ es falsa
- ¿Se puede afirmar que la proposición $[(\sim p \vee \sim q) \wedge p] \rightarrow \sim q$ siempre es verdadera?
- Considere la siguiente proposición:
«Si el salario mínimo aumenta, entonces habría más desempleo de los obreros menos calificados. Sin embargo, si la población tuviera mejores ingresos, entonces consumiría más bienes».
 - Identifique las variables y formalice mediante un lenguaje simbólico.
 - Suponga que el salario mínimo no aumenta, la población no incrementa sus ingresos y que las demás proposiciones simples son verdaderas. ¿Cuál es el valor de verdad de la proposición compuesta?
 - Si la proposición compuesta es verdadera, y el primer antecedente y el segundo consecuente son falsos, halle los posibles valores de verdad de las demás proposiciones simples.

1.2. Análisis de argumentos

Suponga la siguiente situación:

Hoy en la mañana, le dije a mi novia que mi jefe me había convocado a una reunión, seguramente, para aumentarme el sueldo.

Le hice la siguiente promesa: «Si me suben el sueldo, entonces me caso contigo». Ella, feliz e ilusionada, espera noticias en la noche. Desafortunadamente, al llegar a su casa, le dije: «No me subieron el sueldo».

Usted, ¿qué puede concluir de esto? ¿Significa que no me voy a casar con ella?

En esta sección se observarán algunas reglas básicas de inferencia lógica que permitirán analizar argumentos y hacer inferencias válidas.

Cuantificadores

A menudo se encuentran enunciados con palabras o expresiones que indican cantidad. Las palabras *todos*, *cada uno*, *ninguno* se denominan cuantificadores universales y las expresiones *existe*, *algunos*, *hay al menos uno* se llaman cuantificadores existenciales.

Por ejemplo, considere la proposición: Todos los estudiantes de Ciencias son extrovertidos. La negación se escribiría así: «No todos los estudiantes de Ciencias son extrovertidos», o lo que es lo mismo decir: «Existen algunos estudiantes de Ciencias que no son extrovertidos».

Ahora, considere la proposición: Algunas preguntas del examen son difíciles. La negación se escribiría así: «No es cierto que algunas preguntas del examen son difíciles», o lo que es lo mismo decir: «Todas las preguntas del examen no son difíciles».

Como se observa, la negación de un cuantificador universal es el cuantificador existencial y la negación de un cuantificador existencial es el cuantificador universal.

Proposiciones equivalentes

Dos proposiciones son equivalentes si tienen el mismo valor de verdad para todas las situaciones posibles. Si p y q son las proposiciones equivalentes, se simboliza $p \equiv q$.

Ejemplo 1

Se demuestra que $p \rightarrow q \equiv \sim q \rightarrow \sim p$ utilizando la tabla de verdad.

p	q	$p \rightarrow q$	$\sim q \rightarrow \sim p$
V	V	V	F V F
V	F	F	V F F
F	V	V	F V V
F	F	F	V V V

Ejemplo 2

Determine que:

a. $\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$

b. $\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$

p	q	$\sim(p \vee q)$	$\sim p \wedge \sim q$
V	V		
V	F		
F	V		
F	F		

p	q	$\sim(p \wedge q)$	$\sim p \vee \sim q$
V	V		
V	F		
F	V		
F	F		

Resumiendo, se tienen las siguientes equivalencias:

i. $p \rightarrow q \equiv \sim q \rightarrow \sim p$

ii. $\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$

iii. $\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$

Ejemplo 3

Escriba de manera equivalente las siguientes proposiciones:

- a. Si la crisis económica continúa, entonces habrá más pobreza.

Formalizando: p : La crisis económica continúa.

q : Habrá más pobreza.

Se tiene que $p \rightarrow q \cong \sim q \rightarrow \sim p$. Entonces, escribimos de manera equivalente:

«Si no habrá más pobreza, entonces la crisis económica no continúa».

- b. No es cierto que voy a la biblioteca o a la cafetería.

Formalizando: p : Voy a la biblioteca.

q : Voy a la cafetería.

Se tiene que $\sim (p \vee q) \cong \sim p \wedge \sim q$. Entonces, escribimos de manera equivalente:

«No voy a la biblioteca ni a la cafetería».

Ejemplo 4

Escriba de manera equivalente las siguientes proposiciones:

- a. Cuando aumenta el precio de un bien, disminuye la cantidad demandada del mismo.

- b. No es cierto que la utilidad total aumenta a menos que aumente el costo fijo.

- c. Hoy no es martes y no hay reunión de coordinación del curso.

Inferencia lógica

Un argumento lógico es un juicio, en el que a partir de una serie de proposiciones llamadas premisas (leyes, reglas, suposiciones, etcétera), se llega a una proposición llamada conclusión. Cuando se razona a partir de las premisas de un argumento para obtener una conclusión, se pretende que el argumento sea válido.

Los siguientes ejemplos muestran algunos argumentos. (La premisa está sobre la línea horizontal y la conclusión, debajo).

- a. Si el sábado hay examen, entonces hoy empiezo a estudiar.

El sábado hay examen.

∴ Hoy empiezo a estudiar.

- b. Si me suben el sueldo, me caso contigo.

No me subieron el sueldo.

∴ No me caso contigo.

Cuando la conclusión y las premisas son verdaderas, un argumento es válido. Un argumento no válido es una falacia.

A continuación, se describen algunas formas de razonamiento más comúnmente empleadas, llamadas reglas de inferencia.

1. Modus ponendo ponens (MPP)

$$\begin{array}{c} p \rightarrow q \\ p \\ \hline \therefore q \end{array}$$

Por ejemplo, considere las dos siguientes premisas:

Si el Estado incrementa los sueldos, la población demandará más de los bienes.

El Estado incrementa los sueldos.

Para determinar una conclusión válida, se formalizarán las premisas. Sea p «El Estado incrementa los sueldos» y sea q «La población demandará más de los bienes». Las premisas pueden escribirse simbólicamente:

$$\begin{array}{c} p \rightarrow q \\ p \end{array}$$

Según la regla MPP, se escribe la conclusión válida q «La población demandará más de los bienes».

2. Modus tollendo tollens (MTT)

$$\begin{array}{c} p \rightarrow q \\ \sim q \\ \hline \therefore \sim p \end{array}$$

Por ejemplo, considere las dos siguientes premisas:

Si me suben el sueldo, me caso contigo.

No me caso contigo.

Para determinar una conclusión válida, se formalizarán las premisas. Sea p «Me suben el sueldo» y sea q «Me caso contigo». Las premisas pueden escribirse simbólicamente:

$$\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ \sim q \end{array}$$

Según la regla MTT, se escribe la conclusión válida $\sim p$ «No me suben el sueldo».

3. Silogismo hipotético puro (SHP)

$$\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ q \rightarrow r \\ \hline \therefore p \rightarrow r \end{array}$$

Por ejemplo, considere las dos siguientes premisas:

Si aumenta el sueldo, se incrementa la demanda.

Si se incrementa la demanda, suben los precios.

Para determinar una conclusión válida, se formalizarán las premisas. Sea p «Aumenta el sueldo», sea q «Se incrementa la demanda» y sea r «Suben los precios». Las premisas pueden escribirse simbólicamente:

$$\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ q \rightarrow r \end{array}$$

Según la regla SHP, se escribe la conclusión válida $p \rightarrow r$ «Si aumenta el sueldo, suben los precios».

4. Silogismo disyuntivo (SD)

$$\begin{array}{ll} p \vee q & p \vee q \\ \sim p & \sim q \\ \hline \therefore q & \therefore p \end{array}$$

Por ejemplo, considere las dos siguientes premisas:

Voy a la biblioteca o a la cafetería.

No voy a la biblioteca.

Para determinar una conclusión válida, se formalizarán las premisas. Sea p «Voy a la biblioteca» y sea q «Voy a la cafetería». Las premisas pueden escribirse simbólicamente:

$$\begin{array}{l} p \vee q \\ \sim p \end{array}$$

Según la regla SD, se escribe la conclusión válida q «Voy a la cafetería».

Ejemplo 5

Proporcione una conclusión válida para las siguientes premisas:

- a. Si el maestro eleva la calidad de la enseñanza, entonces se genera el progreso que el Perú necesita.
El maestro eleva la calidad de la enseñanza, por lo tanto...

Sea p «El maestro eleva la calidad de la enseñanza».

Sea q «Se genera el progreso que el Perú necesita».

Las premisas pueden escribirse simbólicamente:

$$\frac{p \rightarrow q \quad p}{\therefore q}$$

Según la regla MPP, se escribe la conclusión válida q «Se genera el progreso que el Perú necesita».

- b. Si se eleva la cotización del dólar, se devalúa el nuevo sol. No se devalúa el nuevo sol. Por lo tanto...

- c. Los precios se elevan siempre que la demanda aumenta. La demanda no aumenta. En consecuencia...

- d. Estudias para el examen final o desapruebas el curso de Lógica. Apruebas el curso de Lógica. Por lo tanto...

- e. Si se elevan los impuestos, habrá déficit. Habrá desocupación si hay déficit. Por lo tanto...

- f. Si la selección de fútbol de Perú gana todos sus partidos, se clasifica para el mundial. Si Perú se clasifica al mundial, sus jugadores se cotizan mejor. La selección de fútbol gana todos sus partidos. Por lo tanto...

Sea p «La selección de fútbol de Perú gana todos sus partidos».

Sea q «El Perú se clasifica para el mundial».

Sea r «Los jugadores de la selección se cotizan mejor».

Las premisas pueden escribirse simbólicamente:

$$\frac{p \rightarrow q \quad q \rightarrow r \quad p}{\therefore r}$$

Según la combinación de las reglas MPP y SHP, se escribe la conclusión válida r «Los jugadores de la selección se cotizan mejor».

- g. Cuando estudias para los exámenes, apruebas el curso de Lógica. Si eres un estudiante responsable, estudias para los exámenes. Eres un estudiante responsable. Por lo tanto...

- h. No será separado del aula a menos que guarde su teléfono celular. Si no es separado del aula, atenderá la clase. No guarda su teléfono celular. Por lo tanto...

Ejercicios 1.2

1. Escriba la negación de las siguientes proposiciones:

- a. Todas las clases de Lógica son interesantes.
- b. Algunos textos del sílabo son de consulta.
- c. Cada estudiante trae sus apuntes de clase.
- d. Existen calculadoras solares.
- e. Juan es puntual o pierde su trabajo.
- f. Nelly es servicial y Gloria, amable.
- g. Ni Juan ni David son egoístas.
- h. José va a la reunión o no le suben el sueldo.

2. Escriba una proposición equivalente a las siguientes:

- a. Si Noé promueve el negocio, entonces se opone al pensamiento de Pedro.
- b. No es cierto que hoy devuelvo los libros y me condonan la multa.
- c. Ni las políticas de Estado son malas, ni el costo social es alto.

3. Escriba la negación de las siguientes proposiciones:

- a. Raúl triunfa o se retira del torneo.
- b. Ana aprueba el curso y Luis no pierde su empleo.
- c. Alex asiste a clase o no será del equipo de trabajo.

En los siguientes ejercicios, determine, en caso de ser posible, la conclusión que haga válido el argumento.

- 4. Se encuentran exonerados de ITF los depósitos en las cuentas de ahorro si el depósito es de remuneraciones. Juan no recibió un depósito de remuneraciones. Por lo tanto...
- 5. Si se realizan transferencias de fondos, entonces la transacción se verá afectada por el ITF. José realizó una transferencia de fondo. Por lo tanto...
- 6. Juan no gana utilidades porque no arriesga en su inversión. Ocurre que Juan gana utilidades. Luego...
- 7. Subió el precio del pan porque subió el precio de la gasolina. Si subió el precio del pan, el gobierno no podrá controlar la inflación. Por consiguiente...
- 8. Cuando la información es relevante, esta debe ser guardada para futuras referencias. La información debe ser fácilmente recuperable porque se guarda para futuras referencias. Cierta información no es fácilmente recuperable. En consecuencia...

9. No es posible que la inseguridad en las carreteras se incremente y las primas de los seguros vehiculares disminuyan. Pero la inseguridad en las carreteras se incrementa. Por lo tanto...
10. Si la demanda crece, entonces las compañías se expanden. Las compañías no se expanden o los obreros no tienen más horas de trabajo. Pero se da que los obreros tienen más horas de trabajo. Por lo tanto...
11. Sube el precio del pan porque subió el precio de la gasolina. Sube el precio de la gasolina o el gobierno no puede controlar la inflación. El gobierno controla la inflación. Luego...
12. Si el alumno es memorista y predomina la exposición del docente, entonces el alumno se convierte en un ente receptor y acumulador de conocimiento. Si el alumno es un ente receptor y acumulador de conocimientos, entonces no será libre de expresar su opinión. Por lo tanto...

1.3. Estrategias y resolución de problemas

Los jóvenes de esta generación son muy prácticos: tantean, experimentan, y si se percatan de que un hecho se da con cierta frecuencia, tienden a generalizar un resultado sin tener cuidado de que no siempre es posible. Ante la necesidad de resolver problemas, se presentan dos formas de razonamiento: el inductivo y el deductivo.

Razonamiento inductivo

Una conjetura es una suposición que se construye sobre la base de observaciones o experimentaciones repetidas de un patrón o proceso particular. La conjetura puede ser verdadera o falsa. En ese sentido, el razonamiento inductivo se caracteriza por llegar a una conclusión general (mediante una conjetura), a partir de observaciones repetidas de casos específicos o particulares.

Una conjetura por medio del razonamiento inductivo es falsa si hay una situación en la que no se aplica. Este es un contraejemplo.

Por ejemplo, considere la siguiente secuencia de números naturales:

1; 4; 7; 10; ...

El patrón más probable es que cada número, a partir del segundo, se obtiene al sumar tres al anterior. Efectivamente, esta es la regla. Ahora considere la siguiente fórmula para los números naturales:

$$p = n^2 - n + 41$$

Al asignarse los primeros valores naturales para n a esta fórmula, se obtienen números primos.

n	p
1	41
2	43
3	47
4	53
...	...
10	131
20	401
...	...

Se puede conjeturar que esta fórmula proporciona números primos para cada valor de n natural. Pero para $n = 41$ se tiene $p = 41^2$, que ya no es primo. Se ha encontrado un contraejemplo para la conjetura; por lo tanto, es falsa.

El razonamiento inductivo no garantiza un resultado verdadero, pero sí proporciona un medio para hacer una conjetura. Nunca se puede estar seguro de que lo que es cierto para ciertos casos particulares será cierto en general.

Razonamiento deductivo

El razonamiento deductivo se caracteriza por la aplicación de principios o leyes generales a casos particulares.

Por ejemplo, la fórmula que se utiliza para calcular la suma de los primeros n números naturales 1; 2; 3; ... está dada por:

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Así, para hallar la suma de los primeros 24 números naturales, se toma $n = 24$ y se reemplaza en la fórmula:

$$S_{24} = \frac{24(24+1)}{2} = 300$$

Como se observa, se utiliza una fórmula general y se aplica al caso particular.

Ejemplo 1

Se usará un argumento deductivo para obtener la suma S_n de los primeros n números enteros positivos.

$$S_n = 1 + 2 + 3 + \dots + (n-1) + n$$

Esta suma también se puede reescribir como:

$$S_n = n + (n-1) + \dots + 3 + 2 + 1$$

Al sumar miembro a miembro se tiene:

$$2S_n = (n+1) + (n+1) + \dots + (n+1) + (n+1) + (n+1)$$

$$2S_n = n(n+1) \text{ implica que } S_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Ejemplo 2

Deduzca una fórmula para la suma de los primeros n números.

- Enteros positivos pares.
- Enteros positivos impares.

Resolución de problemas

George Pólya (1888-1985) desarrolló un importante estudio en técnicas para la resolución de problemas. En su obra clásica *Cómo plantear y resolver problemas (How to solve it)*, se presenta un proceso de cuatro pasos para resolver problemas:

- 1.º Entender el problema.** Comprender de qué trata y qué se está solicitando en el problema. Es recomendable leer el problema más de una vez y analizarlo cuidadosamente.
- 2.º Formular un plan.** Determinar cuál es el plan adecuado para abordar el problema. Se pueden emplear algunas de las siguientes estrategias: elaborar una tabla o un diagrama, buscar un patrón, hacer un bosquejo, usar el sentido común, utilizar el método de prueba y error, etcétera.
- 3.º Poner en práctica el plan.** Llevarlo a cabo una vez que se ha encontrado el problema. Ser perseverante si nuestro plan falla o si aparecen obstáculos en el camino.
- 4.º Revisar y comprobar.** Analizar si la respuesta es razonable de acuerdo con el contexto del problema.

Uso de tablas

Problema 1

Un científico comprobó que la población de un determinado tipo de bacterias se duplica por cada minuto transcurrido. Si en un momento dado la población es de 1 000 bacterias, ¿cuántas bacterias habrá en la población transcurridos tres minutos? ¿Y después de quince minutos?

El problema se puede reformular de la siguiente manera: el número inicial de bacterias es igual a 1 000 y este valor se duplica en el transcurso de un minuto. El nuevo valor se duplicará en el siguiente minuto y así sucesivamente.

Se utilizará una tabla para responder a la primera pregunta.

Minuto	Población
0	1 000
1	2 000
2	4 000
3	8 000

De la tabla se obtiene que la población será de 8 000 bacterias después de tres minutos.

Para responder a la siguiente pregunta, se puede observar que existe un patrón de crecimiento a partir del tiempo transcurrido. La siguiente tabla muestra dicho patrón:

Minuto	Población	
0	1 000	$1\,000 \cdot 1 = 1\,000 \cdot 2^0$
1	2 000	$1\,000 \cdot 2 = 1\,000 \cdot 2^1$
2	4 000	$1\,000 \cdot 4 = 1\,000 \cdot 2^2$
3	8 000	$1\,000 \cdot 8 = 1\,000 \cdot 2^3$
...	...	...
15	→	$1\,000 \cdot 2^{15}$

De la tabla se obtiene que la población será de 32,8 millones de bacterias aproximadamente transcurridos 15 minutos.

Problema 2

Una pareja de esposos colocó un par de conejos recién nacidos en una jaula: una hembra y un macho. Durante el primer mes, los conejos no pudieron tener crías, pero a partir del segundo mes empezaron a producir una pareja de conejos por mes. Si cada pareja de conejos se reproduce de la misma forma, ¿cuántas parejas de conejos habrá luego de seis meses? ¿Cuántas parejas de conejos habrá después de un año?

Complete el siguiente cuadro y responda a las preguntas:

Mes	Nro. de pares al inicio	Nro. de nuevos pares producidos	Nro. de pares al final del mes
1			
2			
3			
4			
5			
6			
...	...	...	...
12

Resolución de atrás hacia adelante

Problema 3

Cada semana José acostumbra ir al casino con sus amigos. La primera semana duplicó su dinero, pero luego perdió \$ 20. A la semana siguiente, triplicó lo que tenía y perdió \$ 140. La semana siguiente volvió a intentarlo y perdió la mitad de lo que tenía y regresó a su casa con \$ 500. ¿Con cuánto dinero empezó José en la primera semana?

Para determinar con cuánto dinero José empezó la semana, se resolverá el problema de atrás hacia adelante. Puesto que llegó a su casa con \$ 500 y representa la mitad con la que inició la tercera semana, José empezó la tercera semana con:

$$500 \cdot 2 = 1\,000 \text{ dólares}$$

Antes de perder los \$ 140 la segunda semana, tenía los \$ 1 000 anteriores más los \$ 140 que perdió. Estos \$ 1 140 representan el triple de lo tuvo al empezar la segunda semana. José empezó la segunda semana con:

$$(1\,000 + 140) / 3 = 380 \text{ dólares}$$

Si se repite este proceso una vez más para la primera semana, se obtiene que José empezó la primera semana con:

$$(380 + 20) / 2 = 200 \text{ dólares}$$

La solución obtenida se puede verificar realizando las siguientes operaciones:

Semana 1: $(200 \cdot 2) - 20 = 380$

Semana 2: $(380 \cdot 3) - 140 = 1\,000$

Semana 3: $1000 / 2 = 500$

Este problema se pudo trabajar utilizando una ecuación algebraica, pero este método de ir hacia atrás puede aplicarse fácilmente.

Problema 4

Miguel fue a la librería (ubicada a una cuadra de su casa) y compró un libro que costó S/ 60. Luego, tomó un taxi para ir a la universidad y gastó la sexta parte de lo que le quedaba; el almuerzo en la universidad le costó S/ 10. Después usó la mitad de lo que le quedaba aún en pagar una deuda contraída con un amigo. Finalmente, se fue a su clase con S/ 40 en la billetera. ¿Cuánto dinero tenía Miguel antes de comprar el libro?

Uso de diagramas

Problema 5

Todos los sábados, en un parque de Pueblo Libre, se reúne un grupo de chicos para jugar fútbol. A veces juegan uno contra uno, dos contra dos, y así, dependiendo del número de chicos que salga a jugar. Si cuando se arman los dos equipos, la tradición es que cada uno de los integrantes de uno de ellos salude a cada uno de los integrantes del equipo contrario con un apretón de mano, ¿cuántos saludos se efectuarán si juegan dos equipos de tres integrantes cada uno? ¿Cuántos saludos habrá en un partido oficial de fútbol (11 jugadores por equipo)?

Para resolver este problema, se puede utilizar el siguiente diagrama:

Nro. de jugadores por equipo	Diagrama	Nro. total de saludos
1		1
2		4
3		9

Se efectuarán nueve apretones de mano en total.

Para responder a la siguiente pregunta, observe el patrón que se genera:

Nro. de jugadores por equipo	Nro. total de saludos
1	$1 = 1^2$
2	$4 = 2^2$
3	$9 = 3^2$
...	...
11	11^2

El número total de saludos resulta de elevar al cuadrado el número de jugadores por equipo. Finalmente, en un partido oficial habrá $11^2 = 121$ apretones de mano.

Problema 6

Por su cumpleaños, María realizó una fiesta en su casa e invitó a todas sus amigas del barrio y de la universidad. Si solo asistieron cuatro amigas de María a la fiesta, y todas se saludaron con un beso en la mejilla, ¿cuántos saludos se efectuaron? Y si asistieran 60 amigas, ¿cuántos saludos se efectuarían?

Búsqueda de patrones

Problema 7

Un profesor ofrece clases particulares para alumnos universitarios. En vista de que enseña muy bien y lo recomiendan constantemente, el número de alumnos a los que enseña por semana se ha ido incrementando, formando una sucesión aritmética de la siguiente manera:

$$4; 8; 12; 16; \dots$$

- a. ¿En qué semana tendrá 28 alumnos? ¿Y cuándo tendrá 108 alumnos?

Para responder a la primera pregunta, se puede completar la sucesión, ya que el número de términos pedido es pequeño: 4; 8; 12; 16; 20; 24; 28. Se concluye que en la séptima semana habrá 28 alumnos.

Para responder a la segunda pregunta, se debe encontrar un patrón que nos permita calcular el número de semanas sin completar la sucesión.

Semana	Nro. de alumnos por semana
1	$4 = 4 \cdot 1$
2	$8 = 4 \cdot 2$
3	$12 = 4 \cdot 3$
4	$16 = 4 \cdot 4$
...	...
n	$108 = 4 \cdot n$

A partir de los resultados de la tabla, se obtiene que el profesor enseñará a 108 alumnos en la vigésimo séptima semana.

- b. ¿A cuántos alumnos enseñó en la décimo quinta semana?

A partir del análisis de la tabla, se obtiene que el profesor tuvo $4 \cdot 15 = 60$ alumnos en la décimo quinta semana.

- c. ¿A cuántos alumnos habrá enseñado en total en el transcurso de veinte semanas?

Lo que se debe hacer en esta pregunta es sumar el número de alumnos desde la primera semana hasta la semana vigésima.

Primero, se calcula el número de alumnos de la vigésima semana.

$$4 \cdot 20 = 80 \text{ alumnos}$$

Luego, se hallará la suma S que representa el número total de alumnos.

$$S = 4 + 8 + 12 + 16 + \dots + 80$$

Un artificio que se puede emplear para sumar sucesiones aritméticas es el siguiente:

$$\begin{array}{r} S = 4 + 8 + 12 + 16 + \dots + 76 + 80 \\ S = 80 + 76 + 72 + 68 + \dots + 8 + 4 \\ \hline 2S = \underbrace{84 + 84 + 84 + 84 + \dots + 84 + 84}_{20 \text{ veces}} \end{array}$$

Se obtiene que $2S = 84 \cdot 20$. Finalmente, $S = 840$ alumnos.

Problema 8

La ganancia de una empresa ha ido aumentando cada año en progresión aritmética. Si el primer año se obtuvo una ganancia de \$ 10 000 y el sexto año, \$ 24 000, ¿cuánto ganó en el tercer año? ¿Y en total hasta el octavo año?

Problema 9

El número de alumnos de un grupo de estudio ha aumentado progresivamente. La siguiente sucesión muestra el total de alumnos por semana en dicho grupo desde que se inició hasta que cerró por mantenimiento:

10; 18; 26; ... 410

- ¿Cuántas semanas atendió a los alumnos el grupo de estudio?
- ¿Cuántos alumnos recibieron clases en ese lapso?
- Si cada alumno pagó S/ 5 por clase, ¿cuál fue el ingreso que obtuvo el grupo durante ese periodo?

Uso del ensayo y error

Problema 10

El tatarabuelo de Javier vivió en el siglo XVIII. En una reunión familiar, el padre de Javier le hizo el siguiente comentario: «Tu tatarabuelo tenía x años en el año x^3 ». ¿En qué año nació el tatarabuelo de Javier?

Uso del sentido común

Problema 11

Dos monedas actuales de Perú suman, en conjunto, S/ 1,50. Una de ellas no es una moneda de S/ 1. ¿Cuáles son estas dos monedas?

Uso del tanteo

Problema 12

Manuel llevaba en una carpeta varias hojas que había fotocopiado. De un momento a otro se tropezó y la cuarta parte de las hojas cayó en un charco de agua, el triple de la raíz cuadrada del número de hojas cayó en la pista y solo nueve hojas quedaron en el folder. ¿Cuántas hojas llevaba Manuel en el folder?

Uso de ecuaciones

Problema 13

La diferencia de edades entre Luis y Juana, actualmente, es de 15 años. Hace 5 años, la edad de Luis era la mitad de la edad de Juana. ¿Qué edad tiene Luis?

Ejercicios 1.3

1. El número de alumnos matriculados por año en el curso Deportes de una universidad ha ido aumentando progresivamente. La siguiente sucesión muestra el número de alumnos por año en dicho curso desde que se inició en el año 2000:

50; 75; 100...

- a. ¿Cuántos alumnos se matricularon en 2006?
 - b. ¿En qué año el número de matriculados será de 350 alumnos?
 - c. ¿Cuántos alumnos en total se matricularon desde el inicio del año 2000 hasta el final del año 2012?
2. Antes de iniciar cada ciclo de la universidad, los profesores del curso de Matemática Básica se reúnen en la primera coordinación de curso. Por cortesía, los profesores se saludan entre ellos con un apretón de mano y saludan con un beso en la mejilla a cada profesora. Las profesoras también se saludan con un beso en la mejilla.
 - a. Si el curso está formado por cuatro profesores y dos profesoras, ¿cuántos saludos de mano y de beso en la mejilla hubo en la primera reunión de coordinación? Asuma que todos los profesores y profesoras se saludan.
 - b. Responda a la misma pregunta (a) si el curso está formado por 20 profesores y 15 profesoras. Asuma que todos los profesores y profesoras se saludan.
 3. En determinado momento del día, José mira su reloj y comenta: «El tiempo que ha transcurrido del día es igual a la tercera parte de lo que falta para que acabe». ¿Qué hora marcaba el reloj de José?
 4. El padre de Luis le dijo a su hijo: «Hoy te voy a dar S/ 1; mañana, S/ 2, y así sucesivamente hasta que la suma alcanzada llegue a tener cuatro dígitos».
 - a. ¿Después de cuántos días el padre de Luis dejará de darle propina?
 - b. Si Luis gasta S/ 1 cada día, ¿cuánto dinero ahorrará?
 5. Alonso llevaba en su bolsillo varias monedas de un sol. Como estaba apurado, fue corriendo a su casa y se tropezó con una cáscara de plátano. La tercera parte de las monedas cayó en el pasto, la sexta parte en la pista, el doble de la raíz cuadrada del número de monedas se perdió y solo seis quedaron en su bolsillo. ¿Cuánto dinero le queda finalmente a Alonso?
 6. La diferencia de edades entre Raúl y André, actualmente, es de 15 años. Hace 10 años, la edad de André era el doble de la edad de Raúl. ¿Cuánto sumarán sus edades dentro de 8 años?

7. Un especialista ha analizado el crecimiento de una población de determinado tipo de bacterias. Si inicialmente había 200 bacterias y cada minuto se triplicaba en número respecto del minuto anterior, entonces:
- a. ¿Cuántas bacterias habrá en la población dentro de cuatro minutos?
 - b. ¿Cuántas bacterias habrá en la población luego de 12 minutos?

1.4. Conjunto de los números reales. Ecuaciones

Miguel compra cámaras fotográficas a \$ 350 y las vende a \$ 460. Si la meta de Miguel es obtener \$ 10 000 de ganancia, ¿cómo se podría calcular el número de cámaras que debe vender para lograr su objetivo?

El problema planteado involucra una serie de algoritmos y conceptos matemáticos que se deben tomar en cuenta para obtener una solución. Como ayuda se plantean las siguientes preguntas: ¿Cómo se relacionan los datos dados en el problema? ¿Se puede definir una variable que represente el número de cámaras fotográficas compradas? ¿Se puede obtener un resultado que no sea un número entero positivo?

Para resolver el problema anterior y tener una base teórica de por qué se toman ciertas decisiones, es necesario definir lo siguiente: el conjunto de los números reales, cómo se presentan las respuestas y cómo se resuelven ecuaciones, en particular, ecuaciones de primer grado. A continuación, se abordarán todos estos cuestionamientos.

El conjunto de los números reales se denota por R y tiene los siguientes subconjuntos numéricos:

- Números naturales (N). Sus elementos son los siguientes:

$$N = \{1; 2; 3; \dots\}$$

- Números enteros (Z). Sus elementos son los siguientes:

$$Z = \{\dots -2; -1; 0; 1; 2; \dots\}$$

- Números racionales (Q). Sus elementos son los números que pueden expresarse por el cociente de dos enteros a y b .

$$Q = \left\{ x \in R / x = \frac{a}{b}, a \in Z, b \in Z, b \neq 0 \right\}$$

- Números irracionales (I). Sus elementos son los números que no pueden ser expresados por el cociente de dos enteros a y b .

$$I = \left\{ x \in R / x \neq \frac{a}{b}, a \in Z, b \in Z, b \neq 0 \right\}$$

Figura 1.1. Diagrama de los números reales **Ejemplo 1**

Marque con una X el recuadro al que corresponde cada número.

	N	Z	Q	I	R
0,25					
-3					
π					
0,333...					
$\sqrt{5}$					
$\sqrt[3]{-27}$					
$\sqrt{-6}$					

Valor absoluto

El valor absoluto de un número real a , denotado por $|a|$, se define como:

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{si } a \geq 0 \\ -a, & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

Si se aplica la definición, se tiene $|5| = 5$ y $|-3| = -(-3) = 3$

Observación. El valor absoluto de a nunca puede ser negativo.

Por ejemplo, si se sabe que $b < a$, para expresar $|b-a|$ de forma equivalente sin las barras de valor absoluto, primero se determina el signo de $b-a$:

$$b < a \Rightarrow b - a < 0$$

Luego, se aplica la definición:

$$|b-a| = -(b-a) = a-b$$

Ejemplo 2

Sea $b < 0 < a$, expresar $\frac{|ab|}{|a-b|}$ de forma equivalente sin las barras de valor absoluto.

Se analiza el numerador y denominador por separado:

- $b < 0 < a \Rightarrow ab \dots\dots 0$, por definición: $|ab| = \dots\dots\dots$
- $b < 0 < a \Rightarrow (a-b) \dots\dots 0$, por definición: $|a-b| = \dots\dots\dots$

Finalmente, $\frac{|ab|}{|a-b|} = \dots\dots\dots$

Ejemplo 3

Escriba las siguientes expresiones, equivalentemente, sin las barras de valor absoluto.

- a. Si $a < b < 0$, entonces

$$|a+b| - |b| =$$

- b. Si $a < b < 0$, entonces

$$|a+b| =$$

- c. Si $0 < a < b$, entonces

$$|a| - |b| =$$

- d. Si $a < 0 < b$, entonces

$$|a| - |b| =$$

- e. Si $a < b < 0$, entonces

$$|a| - |b| =$$

- f. Si $a < b < 0$, entonces

$$|a-b| + |b| =$$

g. Si $a < b < 0$, entonces

$$\left| 1 - \frac{b}{a} \right| =$$

h. Si $0 < a < b$, entonces

$$\frac{|a+b|}{|a-b|} =$$

Cálculo y estimación

Cuando se realizan operaciones algebraicas con números, dentro de un ejercicio o problema, se obtienen respuestas numéricas.

El cálculo, obtenido mediante el uso de lápiz y papel o por intermedio de la calculadora, permite obtener el valor numérico de una operación matemática.

La estimación es la manera como se presenta el cálculo. Esta estimación variará dependiendo si el número obtenido presenta o no unidades.

Estimación de números y redondeo de decimales

Solo nos interesa el valor del número obtenido ya que no tiene unidades. A continuación, se presenta un ejemplo que especifica cómo debemos expresar el cociente de la operación división.

Por ejemplo, la respuesta que se obtiene al dividir 15 entre 10 o 3 entre 2 se puede presentar de diferentes formas: $\frac{15}{10}$; $\frac{3}{2}$; o 1,5; 1,50; entre otras. Si se especifica que la respuesta debe expresarse como fracción, se utilizará cualquiera de las dos primeras o alguna otra semejante a ellas. En cambio, si se puntualiza que la respuesta debe darse con decimales, se puede utilizar cualquiera de las dos restantes.

Se puede dar el caso de que el número presentado como respuesta, obtenido con la calculadora, tenga más de un decimal, incluso infinitos decimales. En estos casos se redondeará el número como se muestra en los siguientes ejemplos:

Sea $N = 48,23748912475$ el número obtenido de una operación matemática:

- Si se desea expresar la respuesta usando dos decimales, primero se restringe N a tres decimales: 48,237. Luego, como el tercer decimal (7 en nuestro ejemplo) es mayor o igual a 5, la respuesta será 48,24.

Sea $M = -34,195300234$ el número obtenido de una operación matemática:

- Si desea expresar la respuesta usando tres decimales, primero se restringe M a cuatro decimales: 34,1953. Luego, como el cuarto decimal (3 en nuestro ejemplo) es menor a 5, la respuesta será 34,195.

Ejemplo 4

Expresa los siguientes números aproximando a uno, dos y tres decimales.

	Número	Un decimal	Dos decimales	Tres decimales
a.	2,125589779			
b.	-23,5995087			
c.	95,0185346			

Estimación de números que presentan unidades

Las respuestas numéricas obtenidas al realizar operaciones algebraicas dentro de un contexto de modelación dependerán de la situación problema y lo que representa ese resultado. Nos interesa saber el valor del número obtenido, las unidades que posee y el conjunto numérico al que pertenece.

En los problemas de modelación, los resultados obtenidos pueden representar lo siguiente: número de objetos, número de personas, dinero, tiempo, longitudes, áreas, etcétera. Cada uno de los resultados anteriores tiene sus propias unidades: unos se restringen a los enteros positivos y otros a los reales positivos.

Por ejemplo, si cada gaseosa cuesta S/ 2 y en la billetera hay S/ 10, se pueden comprar $\frac{10}{2} = 5$ gaseosas. Sin embargo, si se tienen en la billetera S/ 5, se pueden comprar $\frac{5}{2} = 2,5$ gaseosas. Es claro que el número de gaseosas es un número entero positivo y no admite una respuesta con decimales. Dentro del contexto de la pregunta, solo se podrían comprar dos gaseosas y esta sería nuestra respuesta, ya que si se redondea a tres gaseosas, nos faltaría dinero.

Por ejemplo, si usted va a la tienda y gasta S/ 54 en la compra de 20 chocolates, podemos determinar que cada chocolate costó $\frac{54}{20} = 2,7$, es decir, S/ 2,70. Resulta evidente que el número que representa el precio de cada chocolate es un número real positivo. Dentro del contexto de la pregunta, el precio de cada chocolate es S/ 2,70 y esta sería nuestra respuesta, ya que si se redondea a S/ 3 cada chocolate, se hubiera gastado S/ 60 y eso no se afirma en el problema.

Frente a un ejercicio algebraico, se obtienen respuestas que no siempre tendrán sentido real al evaluarlo en el contexto del problema. Es por esta razón que interpretar y estimar el resultado numérico es de vital importancia para la solución del problema.

Ejemplo 5

Responda según el contexto de la pregunta.

	Problema	Operación	Respuesta
a.	Usted vende balones de fútbol a un precio de S/ 70 por balón. Si desea obtener un ingreso de S/ 5 000, ¿cuántos balones debe vender?		

	Problema	Operación	Respuesta
b.	Si una persona compra un carro a \$ 15 000 y lo vende a \$ 12 500, ¿cuánto dinero pierde en la transacción?		
c.	En una mueblería, cada silla se vende a S/ 60. Si José tiene S/ 350 en su billetera, ¿cuántas sillas podrá comprar?		
d.	Una jaula puede albergar en total siete palomas. ¿Cuántas jaulas similares se necesitan como mínimo para albergar 106 palomas?		
e.	Al terminar una carrera de autos en la que participó, Pedro se dio cuenta de que había recorrido 71 950 m en total. Si la carrera totalizó 79 vueltas, estime en metros el recorrido de una vuelta. (No use calculadora).		
f.	En un pueblo A, de 236 780 habitantes, 119 569 son hombres. En un pueblo B, de 45 034 habitantes, 23 013 son mujeres. Sin utilizar la calculadora, determine qué ciudad contiene una mayor proporción de hombres.		

Ecuaciones

Las ecuaciones son enunciados en los que dos cantidades o expresiones algebraicas son iguales. Por ejemplo:

- $2x - 3 = 3x + 2$
- $\frac{x-2}{x} + 4 = 3x$
- $\sqrt{x-4} = 3x$

Conjunto de valores admisibles (CVA)

Son los posibles valores que toma la variable que hacen que la expresión exista. Por ejemplo:

- El CVA de la ecuación $\frac{x^2-2}{x-1} = 5$ es igual a $\mathbb{R} - \{1\}$, porque el único valor que hace que la expresión no exista es $x = 1$
- El CVA de la ecuación $\sqrt{x-1} = 3$ es igual a $[1; +\infty[$, porque todos los valores de x menores que 1 hacen que la expresión no exista.

Conjunto solución (CS)

Son los valores que toma la variable del CVA que hacen verdadera la igualdad. Por ejemplo:

- El CS de la ecuación $20 - 5x = 5$ es igual a $\{3\}$, porque es el único valor real que hace verdadera la igualdad ($5 = 5$)
- El CS de la ecuación $x^2 = 4$ es igual a $\{-2; 2\}$, porque son los únicos valores reales que hacen verdadera la igualdad ($4 = 4$)

Para resolver una ecuación, se deben efectuar algunas operaciones para reducirla a otra equivalente, en la que su solución se obtenga de manera directa o quede lista para aplicarle algún método de resolución.

Clasificación de las ecuaciones

Ecuación condicional. Aquella que presenta un número finito de soluciones. Por ejemplo, el conjunto solución de la ecuación $2x - 3 = 9$ es igual a 6.

Ecuación identidad. Aquella que presenta infinitas soluciones. Por ejemplo, el conjunto solución de la ecuación $3x - 3 = 3(x - 1)$ son los reales.

Ecuación imposible. Aquella que no presenta solución real. Por ejemplo, el conjunto solución de la ecuación $2x - 3 = 2(x + 1)$ es vacío.

Ecuación de primer grado

Es una ecuación de la forma $ax + b = 0$, donde $a \neq 0$. La solución de dicha ecuación es $x = -\frac{b}{a}$. Por ejemplo, para resolver la ecuación $6x - 3 = 4x + 5$, se dejan los términos que incluyan x a un lado, las constantes en el otro y se despeja x :

$$\begin{aligned} 6x - 3 &= 4x + 5 \\ 2x &= 8 \\ x &= 4 \end{aligned}$$

Finalmente, se tiene que el CS = $\{4\}$.

Ejemplo 6

Resolver la ecuación $\frac{x}{2} + \frac{x+1}{3} = \frac{5x}{6}$

Para resolver la ecuación, primero se debe simplificar los denominadores. Luego, se multiplica la ecuación por el mínimo común múltiplo (MCM):

$$\text{MCM} = \dots \Rightarrow \left(\frac{x}{2} + \frac{x+1}{3} \right) = \left(\frac{5x}{6} \right) \Rightarrow \dots$$

Así, se obtiene el CS =

Ejemplo 7

Responda concretamente y justifique su respuesta.

- a. ¿Cuál es el valor de b que hace que la ecuación $3 - bx = 2x - 5$ sea una ecuación imposible?
- b. Dada la ecuación $ax + 1 = 1 - 2x$, ¿qué valor o valores de a hacen que la ecuación sea de tipo identidad o condicional?

Ejemplo 8

Resuelva las siguientes ecuaciones y clasifíquelas según el tipo de solución.

a. $2(x + 1) = 5 - (3 - 2x)$

b. $\frac{x}{5} + \frac{x}{4} = 2 + \frac{(3x - 1)}{10}$

c. $\frac{x - 2}{2} + \frac{x}{3} = 1 - \frac{4 - x}{6}$

d. $\frac{x}{6} - \frac{2 - x}{2} = \frac{1}{4} + \frac{2x}{3}$

e. $a(x + b) = \frac{a}{2} + 2(a - bx)$, donde a y b son constantes.

Ejercicios 1.4

Resuelva las siguientes ecuaciones:

$$1. \quad 4 - 2(x + 4) = 8$$

$$2. \quad 3\left(2s - \frac{2}{3}\right) = 6s - 2$$

$$3. \quad 2x - 4 - \frac{2}{3}x = \frac{4}{3}x - 4$$

$$4. \quad 1 - 2(6x - 3) = 3(2x - 5) + 4$$

$$5. \quad (x - 2)^2 - 4x^2 = 3(1 - x^2)$$

$$6. \quad (x + 1)(x - 4) + 2x = x(x + 3)$$

$$7. \quad (-x - 2)^2 = x^2 + 4$$

$$8. \quad \frac{2x - 1}{3} = \frac{x + 1}{2}$$

$$9. \quad 2 - \frac{x - 2}{6} = \frac{x - 3}{2}$$

$$10. \quad 2 - \frac{3(x - 5)}{10} = \frac{x - 3}{5}$$

$$11. \quad \frac{x - 3}{2} - 2 = \frac{x - 2}{3}$$

$$12. \quad \frac{2t + 13}{3} - \frac{6 - t}{4} = 1$$

$$13. \quad \frac{6(t - 9)}{4} + \frac{3t - 9}{5} - 2 = t + \frac{2 - 4t}{3}$$

$$14. \quad \frac{9(t - 9)}{10} + 1 = t - \frac{3t - 5}{2} + \frac{23}{5}$$

$$15. \quad \frac{2x - 1}{3} = \frac{1 + 4x}{6} - \frac{3 - 2x}{4}$$

$$16. \quad \frac{2x - 1}{3} = \frac{x + 1}{2} + \frac{x}{2}$$

$$17. \frac{4x+3}{2} - \frac{2-3x}{7} = \frac{17(2x+1)}{14}$$

En los siguientes ejercicios, considere a , b y c constantes.

$$18. ax + b^2 = a^2 - bx$$

$$19. a(x+b) + x(b-a) = 2b(a-c)$$

$$20. \frac{b-x}{a} + \frac{ax}{b} + \frac{x+b}{2} = x+a$$

$$21. 3(2a-x) + ax = a^2 + 9, a \neq 3$$

$$22. (x-a)^2 - (x+a)^2 = a(a-7x), a \neq 0$$

1.5. Ecuación de segundo grado. Ecuación polinómica

A continuación, se presenta el siguiente problema:

El señor Carranza se dedica a la venta de pantalones en una tienda comercial ubicada en Lima. Por fiestas navideñas, hace buenas ofertas en toda su mercadería. Por ejemplo, el descuento del precio de los pantalones dependerá del número de unidades que un consumidor compre. Si x es el número de pantalones vendidos por el señor Carranza, y estos se venden a un precio de $200 - 10x$ dólares por unidad, ¿cómo se podría calcular el mínimo número de pantalones que se debe vender para obtener un ingreso de \$ 1 500?

Es claro que el señor Carranza obtiene su ingreso multiplicando el número de unidades vendidas por el precio de cada pantalón según la expresión dada. Para hallar el número de pantalones que permite obtener un ingreso de \$ 1 500, se resolverá una ecuación cuadrática.

Si bien es cierto que para desarrollar la ecuación se pueden dar valores a la variable hasta aproximarla a un ingreso de \$ 1 500, esto se vuelve muy complicado si el número de pantalones está expresado en cientos de unidades. Es mejor aprender diferentes métodos de resolución para resolver ecuaciones de este tipo.

Ecuación de segundo grado o ecuación cuadrática

Es una ecuación que tiene como forma general $ax^2 + bx + c = 0$, donde a , b y c son coeficientes reales y $a \neq 0$. Por ejemplo:

- $x^2 - 4x + 3 = 0$
- $x^2 = 9$
- $x^2 - 3 = 2x$

Una ecuación cuadrática está formada por el término cuadrático (ax^2), el término lineal (bx) y el término independiente (c).

Una ecuación cuadrática se puede resolver por el método de factorización, por fórmula general o completando el cuadrado.

Método de factorización

Parte de la idea de expresar la ecuación cuadrática como un producto de factores igual a cero, de modo que se pueda aplicar la siguiente propiedad de los números reales:

$$ab = 0 \Leftrightarrow a = 0 \vee b = 0$$

Entre los métodos de factorización figuran:

i. Diferencia de cuadrados

En este método están presentes el término cuadrático y el término independiente relacionados por el signo menos. Su factorización se muestra a continuación:

$$x^2 - c^2 = 0 \Rightarrow (x - c)(x + c) = 0$$

Por ejemplo, para resolver la ecuación $x^2 - 9 = 0$, se procede de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} x^2 - 9 = 0 &\Rightarrow x^2 - 3^2 = 0 \\ (x - 3)(x + 3) &= 0 \\ x - 3 = 0 \vee x + 3 &= 0 \\ x = 3 \vee x = -3 \\ \text{CS} &= \{-3; 3\} \end{aligned}$$

Complete los espacios en blanco y las líneas punteadas.

$$\begin{aligned} x^2 - 12 = 0 &\Rightarrow x^2 - (\quad)^2 = 0 \Rightarrow \dots\dots\dots \\ &\dots\dots\dots \\ \text{CS} &= \dots\dots\dots \end{aligned}$$

ii. Factor común

En este método están presentes el término cuadrático y el término lineal. Su factorización se muestra a continuación:

$$ax^2 + bx = 0 \Rightarrow x(ax + b) = 0$$

Por ejemplo, para resolver la ecuación $x^2 - 3x = 0$, se procede de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} x^2 - 3x = 0 &\Rightarrow x(x - 3) = 0 \\ x = 0 \vee x - 3 &= 0 \\ x = 0 \vee x &= 3 \\ \text{CS} &= \{0; 3\} \end{aligned}$$

Complete las líneas punteadas.

$$\begin{aligned} 4x^2 - 6x = 0 &\Rightarrow \dots\dots\dots \\ &\dots\dots\dots \\ \text{CS} &= \dots\dots\dots \end{aligned}$$

iii. Aspa simple

Consiste en encontrar los múltiplos de a y c de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ tal es que al multiplicarlos en aspa y operarlos, se obtenga b .

Por ejemplo, para resolver la ecuación $2x^2 - 5x - 3 = 0$, se procede de la siguiente manera:

$$\begin{array}{rcl}
 2x^2 - 5x - 3 = 0 & \Rightarrow & (2x + 1)(x - 3) = 0 \\
 \begin{array}{r} 2x \quad +1 \\ x \quad -3 \end{array} & & 2x + 1 = 0 \vee x - 3 = 0 \\
 & & x = -\frac{1}{2} \vee x = 3 \\
 & & \text{CS} = \left\{ -\frac{1}{2}; 3 \right\}
 \end{array}$$

Complete los espacios en blanco y las líneas punteadas.

$$2x^2 + x - 10 = 0$$

$\begin{array}{r} \times \\ \times \end{array}$

$\Rightarrow$

 CS =

Ejemplo 1

Responda concretamente y justifique su respuesta.

- a. ¿El conjunto solución de la ecuación $x(x + 2) = x(4 - x)$ es $\{1\}$?

- b. ¿El conjunto solución de la ecuación $4x^2 = 9$ es $\left\{ \frac{3}{2} \right\}$?

- c. ¿Cuál es el conjunto solución de la ecuación $4x^2 + 1 = 0$?

Ejemplo 2

Resuelva las siguientes ecuaciones:

a. $81x^2 - 16 = 0$

b. $x(x-3) = (x-3)^2$

c. $\frac{x^2}{3} - \frac{x-9}{6} = \frac{3}{2}$

d. $(x-2)^2 - (2x+3)^2 = 0$

e. $(x-1)^2 - (2x-3) = 0$

f. $ax^2 + (a+b)x + b = 0$, a y b constantes.

Por fórmula general

Se utiliza la fórmula (1) para resolver la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \dots\dots\dots (1)$$

El discriminante (Δ) de una ecuación cuadrática es igual a $\Delta = b^2 - 4ac$. Este permite determinar el número de soluciones que posee la ecuación:

- Si $\Delta > 0$, la ecuación tiene dos soluciones reales diferentes.
- Si $\Delta = 0$, la ecuación tiene una única solución real.
- Si $\Delta < 0$, la ecuación no tiene solución real.

Por ejemplo, para resolver la ecuación $x^2 + 6x + 3 = 0$, primero se definen los valores de a , b y c , y, luego, los reemplazamos en la fórmula (1).

$$\begin{array}{l} a = 1 \\ b = 6 \\ c = 3 \end{array} \Rightarrow x = \frac{-(6) \pm \sqrt{(6)^2 - 4(1)(3)}}{2(1)} = \frac{-6 \pm \sqrt{24}}{2} = -3 \pm \sqrt{6}$$

Finalmente, se obtiene el conjunto solución igual a $CS = \{-3 + \sqrt{6}; -3 - \sqrt{6}\}$

Ejemplo 3

Resolver la ecuación $2x^2 - 3x - 4 = 0$

Para resolver la ecuación usando la fórmula general, primero se determinan los valores de a , b y c (con su signo):

$a = \dots\dots\dots$

$b = \dots\dots\dots$

$c = \dots\dots\dots$

, luego, se reemplazan en $x = \frac{-(\quad) \pm \sqrt{(\quad)^2 - 4(\quad)(\quad)}}{2(\quad)}$ y

se obtiene: $x = \dots\dots\dots$ Finalmente, se tiene que el CS = $\dots\dots\dots$

Ejemplo 4

Responda concretamente y justifique su respuesta.

- a. ¿Para qué valores de m la ecuación $x^2 + 2x + m = 0$ tiene una única solución real?

- b. ¿La ecuación $x^2 + 4 = 0$ tiene dos soluciones reales diferentes?

Ejemplo 5

Resuelva las siguientes ecuaciones:

a. $3x^2 + 18x + 27 = 0$

b. $-3x + x^2 + 5 = 0$

c. $(x-2)(1-2x) = 1$

Método de completar el cuadrado

Este método consiste en sumar una misma cantidad a ambos miembros de la ecuación para obtener un trinomio cuadrado perfecto. Por simplicidad, se considerará el coeficiente del término cuadrático igual a 1 ($a = 1$).

Por ejemplo, para resolver la ecuación $x^2 + 2x = 8$ por el método de completar el cuadrado, se procede de la siguiente manera:

Se suma 1 a ambos lados: $x^2 + 2x + 1 = 8 + 1$

Se obtiene el cuadrado perfecto: $(x+1)^2 = 9 \Rightarrow (x+1)^2 - 9 = 0$

Se hace la diferencia de cuadrados: $(x+1-3)(x+1+3) = 0$

Se aplica la propiedad: $x-2=0 \vee x+4=0$

Se halla el conjunto solución: $x=2 \vee x=-4 \Rightarrow CS = \{-4; 2\}$

Nota: La cantidad N que sumamos a ambos lados de la ecuación se calcula así:

$N = \left(\frac{b}{2}\right)^2$, donde b es el coeficiente del término lineal de la ecuación cuadrática. En el ejemplo anterior, se sumó 1 porque $b=2 \Rightarrow N = \left(\frac{2}{2}\right)^2 = 1$

Ejemplo 6

Resuelva la ecuación $x^2 - 6x = 7$

Para resolver la ecuación, usando el método de completar el cuadrado, se procede de la siguiente manera:

Primero, se determina N y se suma a ambos lados de la ecuación:

$$N = \left(\frac{-b}{2a}\right)^2 \Rightarrow \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$$

Luego, se obtiene el cuadrado perfecto: $(\dots\dots\dots)^2 = \dots\dots \Rightarrow (\dots\dots\dots)^2 - \dots\dots = 0$

.....
.....

Finalmente, se halla el CS =

Ejemplo 7

Resuelva las siguientes ecuaciones por el método de completar el cuadrado:

a. $x^2 - 4x - 12 = 0$

b. $2x^2 - 12x - 14 = 0$

Ecuaciones polinómicas

Un polinomio P , de grado n en la variable x , tiene la forma $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, con $a_n \neq 0$, donde los exponentes de la variable x son enteros no negativos y las constantes $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n$ reales. Estas se denominan coeficientes del polinomio.

Una ecuación polinómica tiene la forma $P(x) = 0$ y para resolverla se debe expresar como un producto de factores lineales o cuadráticos irreducibles iguales a cero; de modo que, por propiedad, cada factor pueda ser igual a cero. Los valores de x que hacen cero cada factor se denominan ceros de P o raíces de la ecuación polinómica $P(x) = 0$.

Por ejemplo, para resolver la ecuación $3x^2 - 3 + x^3 - x = 0$, se procede de la siguiente manera:

Se agrupa de a dos:	$3x^2 - 3 + x^3 - x = 0$
Se factoriza cada grupo:	$3(x^2 - 1) + x(x^2 - 1) = 0$
Se aplica el factor común:	$(x^2 - 1)(3 + x) = 0$
Se aplica la diferencia de cuadrados:	$(x - 1)(x + 1)(3 + x) = 0$
Se iguala cada factor a cero:	$x - 1 = 0 \vee x + 1 = 0 \vee 3 + x = 0$
Se expresa el conjunto solución:	$CS = \{-3; -1; 1\}$

Ejemplo 8

Resuelva la ecuación $x^3 + x^2 - 4x - 4 = 0$,

Para resolver la ecuación, se procede de la siguiente manera:

$$\underbrace{x^3 + x^2}_{x^2(\dots)} - \underbrace{4x - 4}_{4(\dots)} = 0$$

$x^2(\dots) - 4(\dots) = 0$, ¿cuál es el factor común?

$(\dots)(\dots) = 0$, ¿se puede seguir factorizando la expresión?

$$(\dots)(\dots)(\dots) = 0$$

.....

$x = \dots, x = \dots, x = \dots$ Finalmente, $CS = \dots$

Ejemplo 9

Resuelva las siguientes ecuaciones:

a. $r^3 + r^2 - (r + 1) = 0$

b. $2x^3 + 2x^2 + 3x + 3 = 0$

c. $y^5 + y^4 - 16y - 16 = 0$

Ejercicios 1.5

Resuelva las siguientes ecuaciones:

1. $x^2 = 3x$

2. $x^2 - 3x - 10 = 0$

3. $3x^2 + 5x - 2 = 0$

4. $6x^2 - 13x - 28 = 0$

5. $x^2 + 8x = 9$

6. $x^2 - 6x + 13 = 0$

7. $\sqrt{3}m^2 - 2m + 3\sqrt{3} = 0$

8. $(x+4)^2 = 49$

9. $10x^2 + 19x - 15 = 0$

10. $x^2 + 4x = -9$

11. $x^2 + x + 1 = 0$

12. $(x+1)^2 - 2 = (x+1)$

13. $(x-1)^2 = x-7$

14. $5(x-1) - 2(2x^2 - 7x) = -8$

15. $(2x-3)^2 = (2x-3)(x+2)$

16. $(4x-1)(2x-3) = (2x-3)(x+2)$

17. $\frac{2t+13}{3} - \frac{6-t^2}{4} = 1$

18. $\frac{x^2-3}{2} - 2 = \frac{x^2-2x}{3}$

19. $\frac{x(x+1)}{2} = \frac{x+2}{2} - 3$

$$20. \quad x^2 - \frac{3x+1}{2} = \frac{2}{3}$$

$$21. \quad ax^2 - abx = 0, a \neq 0, \text{ donde } a \text{ y } b \text{ son constantes}$$

$$22. \quad 2x^2 - 2bx + ax - ab = 0, \text{ donde } a \text{ y } b \text{ son constantes}$$

$$23. \quad r^3 + r^2 - 4(r+1) = 0$$

$$24. \quad 4x^3 + 4x^2 - 9x - 9 = 0$$

$$25. \quad y^5 + y^4 - 9y - 9 = 0$$

$$26. \quad r^3 - r^2 + 4r - 4 = 0$$

$$27. \quad r^8 - 16 = 0$$

1.6. Ecuaciones racionales e irracionales reducibles a ecuaciones de primer y segundo grado

Cuando se habla de los costos de producción de una empresa, se puede afirmar que el costo total de producción aumenta según se produzcan más artículos. Si se desea calcular cuál es el costo que genera en promedio producir un artículo, se debe dividir el costo total de la producción entre el número de artículos producidos.

Por ejemplo, si el costo total (en dólares) de producir x polos es igual a $20x + 2\,000$, ¿cómo se podría calcular el número de unidades que se deben producir para que el costo promedio por unidad sea igual a 30 dólares por polo?

Para obtener una respuesta, se debe plantear una ecuación diferente a las anteriores. En esta ecuación la variable x se encuentra tanto en el numerador como en el denominador de una expresión. A este tipo de ecuaciones se les denomina ecuaciones racionales y para resolverlas se deben aplicar algunos conceptos matemáticos tales como ecuaciones lineales, cuadráticas o polinómicas, conjunto de valores admisibles, mínimo común múltiplo, entre otros. Además, en este capítulo se trabajará con ecuaciones irracionales y bicuadradas, y se detallarán los procedimientos para resolverlas.

La particularidad de estas ecuaciones es que se reducen a ecuaciones de primer o segundo grado, luego de realizar ciertas operaciones algebraicas.

Ecuaciones racionales

Son ecuaciones que presentan expresiones de la forma $\frac{P(x)}{Q(x)}$, siendo $P(x)$ y $Q(x)$ polinomios con $Q(x) \neq 0$.

Por ejemplo, para resolver la ecuación $\frac{2}{x-2} + \frac{3}{x+2} = \frac{8}{x^2-4}$, se siguen los siguientes pasos:

- Primero, se factorizan los denominadores (si ya están factorizados o los factores son irreducibles, ir al paso ii) con el objetivo de determinar el CVA y el MCM.

$$\frac{2}{x-2} + \frac{3}{x+2} = \frac{8}{(x-2)(x+2)}$$

- Luego, se hallan el CVA = $\mathbb{R} - \{-2; 2\}$ y el MCM = $(x-2)(x+2)$

- Después, se multiplica a ambos lados de la ecuación por el MCM y se resuelve la ecuación:

$$\begin{aligned} 2(x+2) + 3(x-2) &= 8 \\ 5x &= 10 \Rightarrow x = 2 \end{aligned}$$

- Finalmente, se obtiene que el CS = $\emptyset$ porque $x = 2$ no pertenece al CVA.

Ejemplo 1

Resuelva la ecuación $\frac{2}{x-1} + \frac{1}{x+2} = \frac{6x^2}{x^2+x-2}$

Para resolver, se siguen los siguientes pasos:

- Primero, se factoriza el denominador: $\frac{2}{x-1} + \frac{1}{x+2} = \frac{6x^2}{(\quad)(\quad)}$
- Luego, se halla el CVA = y el MCM =
- Después, se multiplica a ambos lados de la ecuación por el MCM y se resuelve:

- iv. Finalmente, el CS =

Ejemplo 2

Responda concretamente y justifique su respuesta.

- a. ¿El conjunto solución de $\frac{x^2-1}{x-1} = x+1$ es?
- b. En la siguiente ecuación $\frac{x}{(x+2)^2} + \frac{1}{x^2+4} = 1$,
¿el CVA = $R - \{2\}$? y ¿el MCM = $(x+2)(x-2)$?

A full-page sheet of white graph paper featuring a light gray grid. The grid consists of small squares, approximately 10 units wide by 10 units high, providing a structured space for drawing or writing.

c. En la siguiente ecuación

$$\frac{x+3}{x} + \frac{x-1}{x(x-2)} = 5, \text{ el MCM} = x^2(x-2)$$

Ejemplo 3

Resuelva las siguientes ecuaciones:

a. $\frac{x+2}{x^2-4} + \frac{1}{x-2} = 1$

b. $\frac{x}{x-2} - \frac{1}{x-3} = \frac{x-5}{x^2-5x+6}$

c. $\frac{1}{x-2} - \frac{3}{x+2} = \frac{2}{x}$

$$d. \frac{x}{x+1} - \frac{2}{1-x} = \frac{2}{x^2-1}$$

$$e. \frac{x-1}{x^2-3x+2} + \frac{x}{x^2-2x} = \frac{2}{x-2}$$

$$f. x - \frac{2-x}{x^2-4} = -2$$

Ecuaciones irracionales

Son ecuaciones en las que la variable está dentro de uno o más radicales. Para resolverlas, se eliminan las raíces elevando los dos miembros al cuadrado. En ocasiones hay que repetir este proceso varias veces.

Por ejemplo, para resolver la ecuación $1 + \sqrt{3-x} = x$, se siguen los siguientes pasos:

- i. Primero, se despeja la raíz (si ya está despejada ir al paso ii): $\sqrt{3-x} = x-1$
- ii. Luego, se elevan al cuadrado ambos miembros y se resuelve la ecuación:

$$(\sqrt{3-x})^2 = (x-1)^2$$

$$3-x = x^2 - 2x + 1$$

$$x^2 - x - 2 = 0$$

$$(x-2)(x+1) = 0$$

$$x-2=0 \vee x+1=0$$

$$x=2 \vee x=-1$$

iii. Después, se reemplazan ambos valores en la ecuación original para verificar que cumplen:

$$\begin{aligned} x=2 &\Rightarrow 2=2 \\ x=-1 &\Rightarrow 3=-1 \end{aligned}$$

iv. Finalmente, se obtiene que el $CS = \{2\}$ porque para $x = -1$ se tiene que $3 \neq -1$.

Ejemplo 4

Resolver la ecuación $\sqrt{2x^2 - 1} + x = 2$

Para resolver, se siguen los siguientes pasos:

i. Primero, se despeja la raíz: $\sqrt{2x^2-1} = \dots\dots\dots$

ii. Luego, se eleva al cuadrado y se resuelve: $(\sqrt{2x^2 - 1})^2 = \dots\dots\dots$

iii. Después, se reemplaza la solución en la ecuación:

iv. Finalmente, el CS =

Ejemplo 5

Responda concretamente y justifique su respuesta.

a. ¿El conjunto solución de la ecuación $\sqrt{x-3} = -1$ es $\{4\}$?

b. ¿El conjunto solución de la ecuación $\sqrt{4x-4} = 2\sqrt{x-1}$ es $\mathbb{R}$?

Ejemplo 6

Resuelva las siguientes ecuaciones:

a. $\sqrt{1-x}+3=0$

b. $\sqrt{1-x}=x+1$

c. $2x+\sqrt{x+4}=13$

d. $\sqrt{x-1}+\sqrt{2-x}=1$

e. $\sqrt{x+1}-1=\sqrt{3-x}$

Ejemplo 8

Resuelva las siguientes ecuaciones:

a. $2x^4 - 3x^2 + 1 = 0$

b. $3x^4 + x^2 - 4 = 0$

c. $(n-2)^4 - (n-2)^2 + 9 = 0$

d. $(x+1)^8 = 15(x+1)^4 + 16$

e. $4x^{-4} - 11x^{-2} - 3 = 0$

f. $2x^{2/5} + x^{1/5} - 6 = 0$

Ejercicios 1.6

Resuelva las siguientes ecuaciones:

$$1. \frac{5}{x+2} = \frac{2}{x-1}$$

$$2. \frac{2}{x-3} + \frac{3}{x-7} = \frac{7}{(x-3)(x-7)}$$

$$3. \frac{x}{x-2} = 2 + \frac{2}{x-2}$$

$$4. \frac{x}{2x-4} - \frac{2}{3} = \frac{7-2x}{3x-6}$$

$$5. \frac{x+1}{x^2+2x} - \frac{3}{x+2} = \frac{12-4x}{x^2-x-6}$$

$$6. \frac{x}{x-2} - \frac{2}{x-3} = \frac{-2}{x^2-5x+6}$$

$$7. \frac{5}{x^2-4} - \frac{8}{x^2-1} = \frac{2}{x^2-3x+2}$$

$$8. \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} = \frac{8}{3}$$

$$9. \frac{x}{x^2+1} = \frac{x-3}{x^2-7}$$

$$10. \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x-2} = 1$$

$$11. \frac{7}{x-1} - \frac{2}{\sqrt{x-1}} + \frac{1}{7} = 0$$

$$12. (x-3) - 2\sqrt{x-3} - 3 = 9$$

$$13. x - 4\sqrt{x} + 3 = 0$$

$$14. \sqrt{7-5x} = 8$$

$$15. \sqrt{7-x} = x-5$$

$$16. 2 + \sqrt{y+1} = \sqrt{y-1}$$

$$17. \sqrt{2y+1} = \sqrt{y} + 1$$

$$18. 3\sqrt{y-3} = 6 - 3\sqrt{2y+1}$$

$$19. \sqrt{x+3} + \sqrt{5+2x} = 2$$

$$20. \sqrt{2x+1} - \sqrt{x+8} = -2$$

$$21. \sqrt{5\sqrt{x}} = \sqrt{2x-3}$$

$$22. x^4 - x^2 - 6 = 0$$

$$23. 3x^4 - 5x^2 + 1 = 0$$

$$24. 36x^4 - 97x^2 + 36 = 0$$

$$25. 3x^{2/5} - 4x^{1/5} = 4$$

$$26. \left(x - \frac{4}{x}\right)^2 - 7\left(x - \frac{4}{x}\right) + 12 = 0$$

1.7. Aplicaciones de ecuaciones de primer y segundo grado

Hasta este momento se han desarrollado varios tipos de ecuaciones, los cuales nos permiten hallar soluciones que se encuentran en diferentes conjuntos numéricos. Para resolver ecuaciones aplicadas en un contexto real económico, primero se deben conocer los términos que se emplearán para generar dichas ecuaciones. Hemos mencionado en capítulos pasados los términos ingreso, costo y ganancia porque son utilizados frecuentemente en el hablar cotidiano. ¿Quién no ha comprado en una tienda o ha vendido algún producto que considera obsoleto? A continuación, se detallan los pasos a seguir en la resolución de problemas de modelación y los términos más empleados en su desarrollo.

Un problema de modelación en matemática es un problema que presenta un texto, datos, conceptos, preguntas, ecuaciones, etcétera, los cuales se deben interpretar y apoyar en la matemática para resolverlo. Para esto, se deben seguir las siguientes reglas:

- Lea detenidamente el enunciado.
- Identifique la variable.
- Exprese las incógnitas en términos de la variable y relacione las cantidades.
- Establezca la o las ecuaciones.
- Resuelva la ecuación y analice las posibles respuestas en el contexto del problema.
- Escriba la respuesta completa con unidades.

Términos usados en negocios

Sea q el número de unidades que se producen y venden, definimos:

Costo fijo (C_F). Es la suma de todos los costos que no dependen del nivel de producción.

Costo unitario (C_U). Es el costo de producir cada unidad.

Costo variable (C_V). Es la suma de todos los costos dependientes del nivel de producción.

Costo total (C). Es la suma de todos los costos. $C = C_V + C_F$

$$C = C_U \cdot q + C_F$$

Precio de venta (p). Es el precio al que se vende cada unidad.

Ingreso total (I). Es la retribución que percibe un productor por la venta efectuada a un consumidor (cliente).

$$I = p \cdot q$$

Utilidad (U). La utilidad del productor es el monto resultante que se obtiene de restar los costos de producción al ingreso obtenido en la venta efectuada.

$$U = I - C \longrightarrow U = p \cdot q - (C_U \cdot q + C_F) \longrightarrow U = (p - C_U) q - C_F$$

Si la utilidad es positiva ($U > 0$), entonces U es ganancia. Si la utilidad es negativa ($U < 0$), entonces U es pérdida.

Volumen mínimo de producción (VMP). Es el menor número de unidades (q) que se debe producir y vender para recuperar lo invertido. Se puede obtener el valor de q de dos maneras: igualando la utilidad a cero ($U = 0$) o igualando el ingreso y el costo ($I = C$).

Para desarrollar un problema de modelación que involucre el costo, el ingreso o la utilidad, es fundamental distinguir en la pregunta si se deben determinar sus ecuaciones o evaluar valores en ellas. Para ello, es necesario reconocer cuáles son los datos brindados en la lectura y relacionarlos con sus respectivas ecuaciones. El siguiente ejemplo nos ayudará a distinguir y utilizar los datos, de forma apropiada, antes de hacerlo en un problema contextualizado.

Complete el cuadro según los datos dados.

	Precio de venta en \$ (p)	Costo unitario en \$ (C_u)	Costo fijo en \$ (C_f)	Ecuaciones (I , C y U)	Nro. de unidades (q)	Ingreso en \$ (I)	Costo total en \$ (C)	Utilidad en \$ (U)
a.	10	8	100	$I = 10q$ $C = 8q + 100$ $U = 2q - 100$	40	400	420	-20
b.	20	15	500	$I =$ $C =$ $U =$	100			
c.				$I = 100q$ $C = 30q + 700$ $U =$	200			
d.		20		$I =$ $C =$ $U =$	40	2 000	1 000	
e.	75		1 000	$I =$ $C =$ $U =$	50		3 000	
f.	50			$I =$ $C =$ $U = 20q - 400$			2 200	

	Precio de venta en \$ (p)	Costo unitario en \$ (C_u)	Costo fijo en \$ (C_f)	Ecuaciones (I , C y U)	Nro. de unidades (q)	Ingreso en \$ (I)	Costo total en \$ (C)	Utilidad en \$ (U)
g.				$I =$ $C = 10q + 100$ $U =$			500	0
h.		5		$I = 17,5q$ $C =$ $U =$		3 500		1 000

Problema 1

La empresa «Mi balón» se dedica a la producción y venta de balones de fútbol. Se sabe que los costos fijos de la empresa ascienden a \$ 2 000 y el costo unitario de producción es de \$ 50. Además, el precio de venta de cada balón es de \$ 70.

- a. Determine las ecuaciones de costo, ingreso y utilidad por la producción y venta de balones de fútbol.

Se define q como el número de balones de fútbol producidos y vendidos por la empresa. A partir de los datos del texto, se pueden determinar las ecuaciones de costo, ingreso y utilidad:

$$C = 50q + 2\,000$$

$$I = 70q$$

$$U = I - C = 70q - (50q + 2\,000) \Rightarrow U = 20q - 2\,000$$

Observación. Las ecuaciones de ingreso, costo o utilidad deben quedar definidas en términos de una variable (en nuestro caso de q).

- b. Halle el costo, ingreso y utilidad si se producen y venden 200 balones de fútbol.

Se reemplaza $q = 200$ en las ecuaciones halladas en (a) y se obtiene:

$$C = \$12\,000; \quad I = \$14\,000; \quad U = \$2\,000$$

Observación. Si se halla el ingreso, costo o utilidad para un determinado valor numérico de la variable, la respuesta será numérica.

- c. Determine el volumen mínimo de producción.

El VMP es el mínimo número de balones que se deben producir y vender para que la utilidad sea cero. Para determinarlo, realizamos lo siguiente:

$$U = 0 \Rightarrow 20q - 2\,000 = 0$$

$$q = 100$$

Por lo tanto, el VMP es igual a 100 balones.

- d. Determine el número de balones que se deben producir y vender para obtener una ganancia igual al 20% del costo total.

Se utiliza un lenguaje simbólico que represente los datos de la pregunta: ($U = 0,2C$). Luego, se reemplaza U y C por sus respectivas ecuaciones y se halla el valor de q :

$$\begin{aligned} U = 0,2C &\Rightarrow 20q - 2\,000 = 0,2(50q + 2\,000) \\ 10q &= 2\,400 \\ q &= 240 \end{aligned}$$

Finalmente, se deben producir y vender 240 balones.

Problema 2

El ingeniero Rodríguez es dueño de la empresa «Papa Huayro Eraser», la cual se encarga de la producción y venta de borradores de papa. El costo fijo de producción es \$ 3 000 y el ingreso por la venta de 2 000 borradores es \$ 10 000.

- a. ¿Cuál es el precio de venta de cada borrador?

Se sabe que el ingreso se obtiene multiplicando el número de borradores vendidos por el precio de venta de cada borrador. Al reemplazar los datos en la ecuación de ingreso se tiene:

$$I = p \cdot q$$

.....=.....

El precio de venta es igual a \$

- b. Si se sabe que producir 500 borradores le cuesta a la empresa \$ 4 500, ¿cuál es el costo unitario?

Se sabe que el costo total de la empresa se obtiene sumando al costo variable el costo fijo. Al reemplazar los datos en la ecuación de costo se tiene:

$$C = C_v \cdot q + C_f$$

.....=.....

El costo unitario es igual a \$.....

Problema 3

Una empresa produce agendas para llevar el registro de impuestos personales. Cada agenda se vende a \$ 8. Los costos fijos realizados por la división son de \$ 25 000 y el costo de producir cada una es de \$ 3.

- Determine las ecuaciones de costo e ingreso de la producción y venta de agendas.
- ¿Cuál es el volumen mínimo de producción?
- ¿Cuántas agendas se deben vender para que la empresa logre una ganancia de 10% del costo total de producción de las agendas?

Problema 4

La empresa «Tintán» se encarga de la producción y venta de tintes para el cabello. Producir cada unidad le cuesta a la empresa \$ 15 y el costo total de producir 200 tintes es de \$ 5 000. Además, cada uno se vende a \$ 25.

- ¿Cuál es el valor del costo fijo?
- Determine las ecuaciones de costo e ingreso.
- ¿Qué utilidad se obtiene al vender 50 tintes?
- ¿Cuántas unidades se deben vender para obtener una ganancia de \$ 4 000?
- ¿Cuántas unidades se vendieron si se perdió \$ 1 000?
- ¿Cuántas unidades se deben vender para obtener una ganancia igual al 15% del costo?
- ¿Cuál es el mínimo número de tintes que se debe vender para obtener ganancias? ¿De cuánto es dicha ganancia?
- ¿Cuál es el máximo número de tintes que se debe vender y aún así generar pérdidas? ¿De cuánto es dicha pérdida?

Problema 5

Una compañía de bienes raíces es propietaria de un edificio de 96 departamentos que se alquilan cada uno a \$ 550 mensuales. Se sabe que por cada \$ 25 mensuales de aumento en el alquiler, tres departamentos quedan desocupados.

- a. ¿Cuántos incrementos de \$ 25 se deben realizar en el alquiler para obtener un ingreso de \$ 54 600? Se sabe que el ingreso mensual de la compañía se obtiene multiplicando el alquiler por el número de departamentos alquilados. Este ingreso varía según se incrementa el alquiler, por tal motivo se aplicará un razonamiento inductivo y se determinará dicho ingreso en términos del número de incrementos.

Se define la variable x : número de incrementos de \$ 25 en el alquiler.

Nro. de incrementos	Alquiler por departamento (\$)	Nro. de departamentos	Ingreso
0	550	96	
1	$550 + 25(1)$	$96 - 3(1)$	
2	$550 + 25(2)$	$96 - 3(2)$	
...	...	...	
x	$550 + 25(x)$	$96 - 3(x)$	$I = (550 + 25x)(96 - 3x)$

Se iguala el ingreso a \$ 54 600 y se resuelve la ecuación:

$$(550 + 25x)(96 - 3x) = 54\,600$$

$$75x^2 - 750x + 1\,800 = 0$$

$$x = 6 \vee x = 4$$

- b. ¿Cuántos departamentos quedarían sin alquilar según los incrementos hallados en (a)?
Si se realizaran 4 incrementos de \$ 25, quedarían sin alquilar $3(4) = 12$ departamentos.
Si se realizaran 6 incrementos de \$ 25, quedarían sin alquilar $3(6) = 18$ departamentos.

- c. ¿A cuánto ascenderá el menor alquiler según los incrementos hallados en (a)?
Si se realizaran 4 incrementos de \$ 25, la renta sería de $550 + 25(4) = 650$
Si se realizaran 6 incrementos de \$ 25, la renta sería de $550 + 25(6) = 700$
La menor renta será de \$ 650.

- d. ¿Se podrá alquilar un departamento a \$ 1 375?
Igualando el alquiler a \$ 1 375, se determina el número de incrementos realizados:

$$550 + 25(x) = 1375$$

$$x = 33$$

Como se realizaron 33 incrementos, el número de departamentos que se puede alquilar es:

$$96 - 3(33) = -3$$

Se concluye que, bajo las condiciones del problema, no se alquilaría ningún departamento a esa renta.

Problema 6

Juan compra correas de cuero a \$ 30 y las vende a \$ 40. En la actualidad tiene en *stock* 50 correas. Sabe, por experiencia, que por cada aumento de \$ 4 en el precio de venta, deja de vender una correa. Si Juan desea obtener una ganancia de \$ 2 000, entonces:

- a. ¿Cuántos incrementos de \$ 4 en el precio tendrá que realizar?

Se sabe que la ganancia de Juan por la venta de correas se obtiene restando de su ingreso el gasto ocasionado por la compra de dichas correas. Como la ganancia varía según el número de incrementos, nuestra variable queda definida así:

x : número.....

x	Precio de venta (p) en \$	Número de correas (q)	Ingreso (I) en \$	Gasto (C) en \$	Ganancia (G) en \$
0	40	50	2 000	1 500	
1	$40 + 4(1)$	$50 - 1(1)$	$(40 + 4(1))(50 - 1(1))$	1 500	
2					
...	...	...	...	...	
x					$G = I - C$

Se iguala la ganancia a \$ 2 000 y se resuelve la ecuación:

Se pueden realizar.....

- b. ¿A qué precio deberá vender las correas?

- c. ¿Cuántas correas venderá a ese precio?

- d. ¿Por qué el gasto no varía?

- e. Suponiendo que vende lo obtenido en la parte (c), y remata las correas sobrantes a \$ 35, ¿cuál será su ganancia máxima?

Actividad colaborativa | Modelación de ecuaciones lineales y cuadráticas

Una cadena internacional de restaurantes abrirá sus puertas a los comensales limeños en dos locales ubicados en los distritos de Pueblo Libre y Surco.

A continuación, se especifican algunos aspectos referidos al costo de producción (que incluyen los costos fijos y los costos de elaboración de cada plato de comida) y al ingreso (que incluye el precio de venta de cada plato) en cada uno de los locales:

Fuente: Wikimedia Commons

- **Local A**

Se ubica en el distrito de Pueblo Libre. La suma de los costos mensuales por el alquiler del local y por los servicios es de S/ 10 000 y cada plato de comida se vende a S/ 22. Se sabe además que si se venden 1 000 platos de comida al mes se gana el 10% del costo total.

Fuente: Wikimedia Commons

- a. ¿Cuál es el costo de elaborar cada plato de comida en el local A?

- **Local B**

Se ubica en el distrito de Surco. Los costos fijos del local son de S/ 15 000 y el ingreso obtenido por la venta de 1 000 platos es de S/ 20 000. Se sabe también que el volumen mínimo de producción (VMP) es de 2 000 platos de comida al mes.

- b. ¿Cuál es el costo de elaborar cada plato en el local B?

- c. ¿En cuál de los dos locales, A o B, se recupera la inversión realizada vendiendo menos platos de comida?

- d. En el local B se pueden vender hasta 3 000 platos de comida al mes. Para aumentar los ingresos del local, el dueño decide incrementar el precio de venta; sin embargo, por cada S/ 2 de incremento en el precio el número de platos que vende se reduce en 100.
- i. ¿Cuántos incrementos de S/ 2 en el precio se deberían realizar para obtener un ingreso de S/ 79 200?

- ii. ¿Cuál de los dos incrementos hallados en la parte (i) le convendría realizar al dueño? Justifique comparando las ganancias que se obtendrían al realizar cada incremento.

Ejercicios 1.7

- El señor Linares se dedica a la producción y venta de carteras. El costo fijo de producción es de \$ 3 000 y producir cada una cuesta \$ 20.
 - Si cada cartera se vende a \$ 30, ¿cuál es la ecuación de utilidad?
 - ¿Cuántas unidades se deben vender para obtener una ganancia de \$ 4 000?
 - ¿Cuántas unidades se deben vender para obtener una ganancia igual al 20% del ingreso?
 - Si la empresa obtiene pérdidas cuando el número de unidades vendidas está en el intervalo $[0; m]$, ¿cuál es el valor de m ?
- El señor Ríos es dueño de la óptica «Ojitos de gato», que se dedica a la producción y venta de lentes de contacto de diferentes colores. Producir cada lente de contacto le cuesta \$ 50 y el costo fijo asciende a \$ 1 200. Se sabe además que su ingreso por la venta de 10 lentes de contacto es \$ 800.
 - Halle el precio de venta de cada lente de contacto.
 - Determine la ecuación de utilidad.
 - ¿Cuál es el mínimo número de lentes de contacto que debe vender el señor Ríos para que obtenga ganancias?
 - ¿Cuántos lentes de contacto debe vender el señor Ríos para que su ingreso sea el 60% del costo total?
- La empresa «Don balón» se dedica a la producción y venta de balones de fútbol. Se sabe que el costo fijo de la empresa es de \$ 2 000, y el costo unitario de cada balón es de \$ 50. Además, el ingreso por la venta de 80 balones es \$ 5 600.
 - Demuestre que el precio de venta es de \$ 70.
 - Determine el volumen mínimo de producción.
 - Determine el número de balones que se deben producir y vender para obtener una ganancia igual a al 15% del costo total.
- La empresa «Dolce&Gamarra» se dedica a la producción y venta de finas billeteras de cuero. Los costos fijos de la empresa ascienden a S/ 20 000 y el costo total de producir 1 000 billeteras es de S/ 60 000. Se sabe además que cada billetera se vende en S/ 90.
 - ¿Cuál es el costo unitario?
 - Determine la ecuación de utilidad y halle el volumen mínimo de producción.
 - ¿Cuántas unidades se deben vender para obtener una ganancia igual al 25% del costo?
- La compañía «Fa» produce focos ahorradores de muy buena calidad y mayor durabilidad. Los costos fijos mensuales realizados por la compañía ascienden a \$ 4 000 y el costo unitario de producción es de \$ 2. Se sabe además que el volumen mínimo de producción es de 2 000 focos.

- a. Demuestre que el precio de venta es \$ 4.
 - b. ¿Cuál debe ser el nivel de ventas para que la compañía logre una ganancia de 20% del costo total de producción de focos ahorradores?
 - c. Determine el número máximo y mínimo de focos ahorradores que deben venderse, de tal modo que se obtenga una utilidad entre \$ 10 000 y \$ 12 000.
-
6. Una cadena internacional de restaurantes abrirá sus puertas a los comensales limeños en el distrito de Pueblo Libre. La suma de los costos mensuales por alquiler de local, salario de empleados y servicios ascienden a S/ 5 000 y cada plato de comida se vende a S/ 15. Por estadísticas, se sabe que si se venden 3 000 platos de comida al mes se gana S/ 11 500. ¿Cuál es el costo de elaborar cada plato en dicho local?
 7. Un restaurante se ubica en el distrito de Miraflores. Los costos fijos mensuales ascienden a S/ 10 000 y el costo por elaborar cada plato de comida es de S/ 10. Por estadísticas, se sabe que la empresa recupera lo invertido al vender 1 600 platos de comida al mes. ¿A cuánto se vende cada plato en dicho restaurante?
 8. Roger EPG tiene un negocio de alquiler de autos. En su local tiene 50 camionetas. Si el alquiler es de \$ 400 por día, se alquilan todas las camionetas. Sin embargo, por cada incremento de \$ 20 por día, se quedará sin alquilar dos camionetas. Roger quiere obtener un total de \$ 19 760 diarios por concepto de alquiler. Determine el alquiler que debe cobrarse por cada camioneta.

1.8. Logaritmos

Expresar un número como potencia de otro, por ejemplo, 9 en base 3 ($9=3^2$) o 64 en base 4 ($64=4^3$), etcétera, se reduce a encontrar un exponente al que hay que elevar un número, llamado base, para obtenerlo. El problema surge cuando el exponente no se obtiene de forma directa. ¿Cómo podríamos encontrar dicho exponente?

Se intentará dar respuesta a la pregunta tratando de encontrar el exponente al que hay que elevar el número 2 para obtener el número 6, es decir, resolver la ecuación $2^x = 6$.

La siguiente tabla muestra cómo se aproxima al número 6 dándole valores a x :

x	2,5	2,6	2,59	2,58	2,583	2,585
2^x	5,656...	6,062...	6,020...	5,979...	5,991...	6,0001...

Un valor aproximado de x será 2,585, pero no es el real. ¿Cómo se podría hallar el valor real de dicho exponente? En este capítulo se aprenderá cómo hacerlo.

Definición

El logaritmo de N en base b es el exponente x al que debe elevarse la base b para obtener el número N , es decir:

$$\log_b N = x, \text{ si y solo si, } b^x = N, \text{ donde } N > 0, b > 0 \text{ y } b \neq 1$$

Las dos ecuaciones de la definición son equivalentes. La primera ecuación ($\log_b N = x$) es la forma logarítmica y la segunda ecuación ($b^x = N$), la forma exponencial.

Conocer la definición de logaritmo es importante porque nos permitirá:

- Resolver ecuaciones exponenciales y logarítmicas.
- Hallar los puntos de intersección de las gráficas de funciones logarítmicas y exponenciales con los ejes coordenados.
- Hallar el tiempo en problemas de interés compuesto, de curvas de aprendizaje, de curvas logísticas, etcétera.

Ejemplo 1

- Para expresar $\log_2 8 = 3$ en forma exponencial, usando la definición, elevamos la base al resultado y lo igualamos a 8, es decir, $2^3 = 8$.
- Para expresar $25^{\frac{1}{2}} = 5$ en forma logarítmica, usando la definición, igualamos el logaritmo de 5 en base 25 a $\frac{1}{2}$, es decir, $\log_{25} 5 = \frac{1}{2}$.

Ejemplo 2

Complete el cuadro expresando en forma logarítmica o exponencial cada uno de los siguientes ejercicios:

	Forma logarítmica		Forma exponencial	
a.	$3^0 = 1$		$\log_5 1 = 0$	
b.	$a^b = c$		$\log_x y = w$	
c.	$\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 0,25$		$\log_3 \frac{1}{27} = -3$	
d.	$(3)^{-2} = \frac{1}{9}$		$\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{4} = 2$	
e.	$x^{a+b} = y$		$\log_m (x + y) = n$	

Propiedades

Las propiedades de logaritmos ayudan a simplificar expresiones, entre ellas figuran:

- $\log_a 1 = 0$
- $\log_a a = 1$
- $\log_a a^x = x$
- $a^{\log_a x} = x$

Por ejemplo, para hallar el valor numérico de la expresión $\log_a \sqrt{a} + \log_b \frac{1}{b}$, se procede de la siguiente manera:

Primero, se expresa dentro del logaritmo $\sqrt{a}$ y $\frac{1}{b}$ en base a y b , respectivamente:

$$\log_a a^{\frac{1}{2}} + \log_b b^{-1}$$

Luego, se aplica la tercera propiedad: $\frac{1}{2} + (-1) = -\frac{1}{2}$

Ejemplo 3

Hallar el valor numérico de $2\log_{x \cdot y} 1 - \log_x \frac{\sqrt{x}}{x}$

Para hallar el valor numérico de la expresión, se procede de la siguiente manera:

Primero, se expresa $\frac{\sqrt{x}}{x}$ en base x : por lo que la expresión queda

Luego, se aplican las propiedades de logaritmos según corresponda y se obtiene:
.....

Ejemplo 4

Halle el valor numérico de las siguientes expresiones:

a. $2^{\log_b b^2} + \frac{1}{\log_a \sqrt{a^3}}$

b. $\log_a \sqrt[3]{a} + \log_a \sqrt[4]{\frac{1}{a}}$

c. $\frac{\log_b(\sqrt{b} \cdot \sqrt[4]{b})}{2\log_{2b} 4b^2}$

Observaciones:

- Al logaritmo en base 10 de N , se le conoce como logaritmo decimal y su expresión equivalente es $\log N$.
- Al logaritmo en base e de N , se le conoce como logaritmo natural y su expresión equivalente es $\ln N$.
- Para calcular algunos logaritmos, se puede usar la fórmula de cambio de base:
 $\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b} = \frac{\log x}{\log b} = \frac{\ln x}{\ln b}$. Esta fórmula se usa cuando la calculadora no tenga incorporada la función $\log_a b$.

Ejemplo 5

Use su calculadora para encontrar los siguientes logaritmos:

- a. $\log_2 50 =$
- b. $\log 1\,000 =$
- c. $\log_3 0,25 =$
- d. $\ln 20 =$
- e. $\log_e 10 =$
- f. $\log_{0,3} 0,9 =$
- g. $\log_5 100 =$
- h. $\log_2(-2) =$

Ecuaciones exponenciales

Son aquellas ecuaciones en las cuales la incógnita se encuentra en el exponente.

Por ejemplo, para resolver la ecuación $2^{x-1} = 8$, se pueden utilizar dos formas diferentes:

1.ª forma. Se aplica la definición y se expresa en forma logarítmica:

$$2^{x-1} = 8 \Rightarrow x - 1 = \log_2 8$$

$$x = \log_2 8 + 1$$

$$x = 4$$

2.ª forma. Se colocan a una misma base las expresiones a ambos lados de la ecuación. Luego, se igualan los exponentes:

$$2^{x-1} = 8 \Rightarrow 2^{x-1} = 2^3$$

$$x - 1 = 3$$

$$x = 4$$

Observaciones:

Solo aplicaremos la segunda forma si las expresiones a ambos lados de la igualdad se pueden expresar en la misma base.

Ejemplo 6

Resuelva la ecuación $2 \cdot 3^{2-3x} = 8$

Para resolver la ecuación, se siguen los siguientes pasos:

Primero, se despeja el exponencial:

Luego, se aplica la definición:

.....

Finalmente, se determina el CS =

Ejemplo 7

Responda concretamente y justifique su respuesta.

- a. Dada la ecuación $A = Pe^{r \cdot t}$, ¿se puede afirmar

que $t = \frac{\ln P}{r \ln A}$?

- b. ¿Es correcto afirmar que

$(-3)^2 = 9 \Rightarrow \log_{-3} 9 = 2$?

Ejemplo 8

Resuelva las siguientes ecuaciones:

a. $4 \cdot 5^{4-x} = 2$

b. $2^{x^2-x} \cdot 4^{x-3} = \frac{1}{8}$

c. $3^{x^2-3} = 10$

d. $e^{2x^2-1} = \frac{2}{3}$

e. $(3^x)^2 - 3^x - 6 = 0$
(sug.: realice el cambio de variable $3^x = a$)

f. $10^{2x} - 3 \cdot 10^x + 2 = 0$

Ejercicios 1.8

1. Escriba en forma logarítmica:

a. $4^2 = 16$

b. $9^3 = 729$

c. $125^{\frac{1}{3}} = 5$

d. $7^0 = 1$

e. $81^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{9}$

f. $4^2 = a$

g. $2^b = 16$

h. $b^x = y$

2. Escriba en forma exponencial:

a. $\log_6 1296 = 4$

b. $\log_5 125 = 3$

c. $\log_4 8 = \frac{3}{2}$

d. $\log_{10} 0,01 = -2$

e. $\log_b b = 1$

3. Encuentre el valor de a en cada uno de los siguientes ejercicios:

a. $\log_a 81 = 2$

b. $\log_a 27 = 3$

c. $\log_4 a = -\frac{1}{2}$

d. $\log_9 a = -\frac{3}{2}$

4. Use su calculadora para calcular los siguientes logaritmos (redondee a dos decimales):

a. $\log 25$

b. $\log 60$

c. $\log 1000$

d. $\log 0,25$

e. $\log -16$

f. $\log 625$

g. $\log_2 20$

h. $\log_3 100$

5. Resuelva las siguientes ecuaciones:

a. $3^{x+1} = 27$

b. $4^{4-x} = \frac{1}{64}$

c. $10^{2x+3} = 200$

d. $2^{x^2-x-3} = \frac{1}{2}$

e. $(x^2 + x + 4)^{\frac{3}{4}} = 8$

f. $2^{4x} \cdot 4^{x-3} = (64)^{x-1}$

1.9. Aplicaciones de las exponenciales y logaritmos al interés compuesto

¿Quién no ha ido alguna vez a un banco a realizar una transacción, retirar dinero, abrir una cuenta, etcétera? Suponga que se acerca a un banco para abrir una cuenta y realizar un depósito de dinero, y la persona que lo atiende le ofrece una tasa de interés compuesto de 6% anual por su dinero. Como usted sabe de porcentajes, puede calcular que el interés ganado por su dinero en un año será igual al 6% del dinero que deposite, por ejemplo, si deposita \$ 2 000, ganará \$ 120 el primer año. El problema para usted será calcular cuánto ganará de intereses en un periodo de 5 años.

El proceso realizado por usted, para el primer año, probablemente fue mental, pero para los siguientes años el cálculo se hace más engorroso. ¿Cómo podría hallar el interés ganado por su dinero en el periodo de tiempo planificado sin la necesidad de que lo haga año por año?

Interés simple

Se caracteriza porque el interés generado por un capital no es invertido nuevamente en cada periodo. Por ejemplo, si se invierte un capital de \$ 1 000 a una tasa de interés simple de 5% anual en un tiempo de 4 años, del gráfico se observa que los intereses ganados en cada periodo (I_1, I_2, I_3 e I_4) son iguales, retirando luego de 4 años un monto de \$ 1 200.

De forma general, el interés I ganado al depositar un capital P a una tasa de interés simple de $i\%$ anual en un periodo de n años es igual a:

$$I = P \cdot i \cdot n$$

Luego de dicho periodo, se retirará un monto A igual a:

$$A = P + I = P(1 + i \cdot n)$$

Interés compuesto

Se caracteriza porque el interés que produce una cantidad de dinero invertida (o capital) se invierte nuevamente, de modo que también genere intereses. Es decir, el interés se convierte en capital en cada periodo. Por ejemplo, si se invierte un capital de \$ 1 000 a un interés compuesto de 5% anual en un

tiempo de 4 años, del gráfico se observa que los intereses ganados en cada periodo (I_1, I_2, I_3 e I_4) van aumentando, retirando luego de 4 años un monto de \$ 1 215,50.

De forma general, si se invierte un capital P por n periodos a una tasa de interés compuesto de $i\%$ por periodo, el monto A (llamado también capital compuesto o valor futuro) y el interés ganado I (también llamado interés compuesto) obtenidos en ese periodo están dados por:

$$A = P(1 + i)^n, \quad I = A - P$$

Si r es la tasa de interés anual (o tasa nominal) y se compone (o capitaliza) m veces al año durante t años, la tasa y el tiempo se ven afectados por el factor m , de modo que:

$$i = \frac{r}{m} \text{ y } n = m \cdot t$$

La siguiente tabla muestra los valores de m según la composición de la tasa:

Composición	m
Anual	1
Semestral	2
Trimestral	4
Bimestral	6
Mensual	12
Diaria	360

Problema 1

El señor Ramírez visitó tres bancos con el fin de decidir en cuál de ellos depositará \$ 1 000 por un periodo de 5 años.

- a. Si el banco A le ofrece una tasa de interés simple anual de 10%, ¿cuál es el monto que retirará el señor Ramírez en dicho periodo? ¿Cuánto ganará de interés?

Para hallar el monto (A) que retirará el señor Ramírez y el interés (I) que ganará su dinero en el periodo señalado, se reemplazarán los datos en las fórmulas de interés simple:

$$A = P(1 + i \cdot n) \Rightarrow A = 1\,000(1 + 0,1(5)) \Rightarrow A = \$ 1\,500$$

$$I = A - P \Rightarrow I = 1\,500 - 1\,000 \Rightarrow I = \$ 500$$

- b. Si el banco B le ofrece una tasa de interés compuesto anual de 10%, ¿cuál es el monto que retirará el señor Ramírez en dicho periodo de tiempo? ¿Cuánto ganará de interés?

Para hallar el monto (A) que retirará el señor Ramírez y el interés (I) que ganará su dinero en el periodo de tiempo señalado, se reemplazarán los datos en las fórmulas de interés compuesto:

$$A = P(1+i)^n \Rightarrow A = 1\,000(1+0,1)^5 \Rightarrow A = \$ 1\,610,51$$

$$I = A - P \Rightarrow I = 1\,610,51 - 1\,000 \Rightarrow I = \$ 610,51$$

- c. Si el banco C le ofrece una tasa de interés anual de 10% compuesto trimestralmente, ¿cuál es el monto que retirará el señor Ramírez en dicho periodo? ¿Cuánto ganará de interés?

Como la tasa anual se compone trimestralmente ($m = 4$), se debe hallar la tasa trimestral y expresar el tiempo en trimestres:

$$i = 10\% \text{ anual} \Rightarrow i = \frac{r}{m} = \frac{10\%}{4} \Rightarrow i = 2,5\% \text{ trimestral}$$

$$t = 5 \text{ años} \Rightarrow n = m \cdot t = 4(5) \Rightarrow n = 20$$

Para hallar el monto (A) que retirará el señor Ramírez y el interés (I) que ganará su dinero en el periodo señalado, se reemplazan los datos en las fórmulas de interés compuesto:

$$A = P(1+i)^n \Rightarrow A = 1\,000(1+0,025)^{20} \Rightarrow A = \$ 1\,638,62$$

$$I = A - P \Rightarrow I = 1\,638,62 - 1\,000 \Rightarrow I = \$ 638,62$$

- d. ¿En qué banco le conviene al señor Ramírez depositar su dinero?

Luego de comparar los montos finales o los intereses ganados en cada banco, al señor Ramírez le conviene depositar su dinero en el banco C.

Problema 2

Si se depositan S/ 20 000 al 3,5% anual compuesto semestralmente por 8 años, determine:

- a. El capital compuesto.

Para determinar el capital compuesto (A), primero se reconocen las variables dadas en el texto.

$$P = S / \dots\dots\dots$$

$$m = \dots\dots$$

$$t = \dots\dots \text{ años. Entonces } n = m \cdot t \dots\dots \text{ semestres}$$

$$r = \dots\dots \% \text{ anual. Entonces } i = \dots\dots \% \text{ semestral}$$

Luego, se reemplaza en $A = P(1+i)^n$

- b. El interés que ganó en ese lapso.

El interés ganado es igual a $I = A - P \Rightarrow I = S / \dots\dots\dots$

Problema 3

Responda concretamente y justifique su respuesta.

- a. A partir de la fórmula $A = P(1+i)^n$, despeje el tiempo n .

[illegible]

- b. Usted deposita dólares P en un banco por 3 años. La tasa es de $i\%$ anual los dos primeros años y de $j\%$ el tercer año. Determine el capital compuesto, luego de ese periodo, en términos de P, i y j .

Problema 4

Si se invierten \$ 1 000 a una tasa de interés anual del 4% compuesto mensualmente, ¿en cuánto tiempo se debe retirar el dinero para que se incremente en 40%?

Problema 5

Miguel depositó sus ahorros, que ascienden a \$ 4 000, en una financiera que ofrece una tasa de 4,5% de interés anual compuesto bimestralmente. Si los intereses que ganó fueron de \$ 500, ¿cuánto tiempo estuvo su dinero invertido?

Problema 6

Se contrata un fondo de inversión para la educación de un niño y se establece que será por medio de un solo pago, de modo que al cabo de 10 años habrá en el fondo \$ 40 000. Si el fondo gana interés a una tasa de 6,5% anual compuesto semestralmente, ¿cuánto dinero debe pagarse al fondo?

Problema 7

La señora Neyra depositó en un banco un capital de \$ 10 000 a una tasa de 6% anual compuesto mensualmente por 4 años. Luego de ese periodo, se acercó al banco y le ofrecieron una tasa de 7% anual, pero sin componerla mensualmente. Si la señora Neyra retiró un monto de \$ 15 563,94, ¿cuántos años transcurrieron desde que hizo el depósito?

Problema 8

Teresa piensa depositar en un banco un capital de \$ 5 000 para retirar, en el menor tiempo posible, \$ 8 000. El banco A le ofrece una tasa de 20% anual compuesto trimestralmente y el banco B, una tasa de 25% anual compuesto semestralmente. ¿Qué banco debería elegir?

Ejercicios 1.9

1. José, alumno de la UPC del curso Matemática Básica, guardaba todas sus propinas en una alcancía. Luego de la clase «Aplicaciones de la exponencial al interés compuesto» regresó a su casa y la rompió. Su objetivo era depositar sus ahorros por 5 años en alguna entidad y ganar intereses.

José fue con sus S/ 1 000 a dos bancos y obtuvo la siguiente información:

- Banco A: ofrece una tasa de interés de 5% compuesto anual.
- Banco B: ofrece una tasa de interés de 4,9% anual compuesto trimestralmente.

¿En qué banco le conviene depositar su dinero? ¿Por qué?

2. El señor Chang es dueño del banco «TDG», que ofrece una tasa de interés de 8% anual compuesto trimestralmente. El señor Chang cuenta con un capital de \$ 10 000 que desea invertir en el banco y así ganar un interés de \$ 1 716 en un tiempo determinado.
 - a. Halle el capital compuesto o monto final.
 - b. Halle el tiempo que estuvo su dinero en el banco para ganar dicho interés.
3. El señor Rodríguez desea depositar en un banco un capital de \$ 10 000 por 6 años. Un asesor financiero del banco le ofrece una tasa de 5% anual compuesto mensualmente por los primeros 4 años y de ahí en adelante una tasa de 6% anual compuesto semestralmente. ¿Cuál es el interés ganado por su dinero en dicho lapso?
4. Si se invierten \$ 2 000 en un banco a un interés anual del 10% compuesto trimestralmente, ¿cuánto tiempo debe permanecer el dinero en el banco para retirar \$ 2 500?
5. Si se invierten \$ 5 000 a una tasa de interés anual del 3% compuesto semestralmente, ¿en cuánto tiempo debe retirar su dinero para que se incremente en 40%?
6. El señor Rojas desea obtener un interés del 20% de su capital invertido en un banco que ofrece una tasa de 5,5% anual compuesto trimestralmente. ¿Cuánto tiempo debe permanecer su dinero en el banco?
7. El banco A ofrece una tasa de interés de 6% anual y el banco B, una tasa de interés del 5% anual compuesto semestralmente. Si se deposita un capital de \$ 5 000 en cada uno de los bancos, ¿en cuál de ellos es más rápido ganar un interés de \$ 1 000?

1.10. Sistema de ecuaciones de dos variables

En los capítulos anteriores, se han resuelto ecuaciones con una sola variable. Existen situaciones en las que se trabaja con dos variables. Por ejemplo, Manuel compró dos departamentos: uno en el distrito de Pueblo Libre y el otro, en San Miguel; gastó en ellos un total \$ 50 000. Luego de 4 años vendió el departamento de Pueblo Libre al triple de su valor original, y el de San Miguel, al doble. Si obtuvo por la venta \$ 130 000, ¿cómo se podría determinar cuánto le costó cada uno de los departamentos?

Es probable que, a partir de la pregunta, se utilicen dos variables diferentes que representen el costo de cada uno de los departamentos. Esto generará dos ecuaciones que forman un sistema de ecuaciones en el que se relacionen ambas variables. La nueva interrogante será: ¿cómo resolvemos dicho sistema? A continuación, se presenta cómo se define un sistema de ecuaciones y los diferentes métodos para resolverla.

Sistema de ecuaciones lineales

Se llama sistema de ecuaciones lineales de dos variables a cualquier conjunto de dos ecuaciones de primer grado con dos variables:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}, \text{ donde } a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 \text{ son constantes.}$$

El conjunto solución de dicho sistema está formado por los valores de x e y , tales que al reemplazarlos en ambas ecuaciones se obtiene una igualdad. Se denota como un par ordenado siguiendo el orden del abecedario, es decir, $CS = \{(x; y)\}$. También puede darse el caso que el sistema no tenga solución, $CS = \emptyset$, o que presente infinitas soluciones. Para este último caso, se tendrá que hacer una parametrización.

Método de igualación

Este método consiste en despejar la misma variable en ambas ecuaciones, igualarlas y resolver la ecuación resultante.

Por ejemplo, para resolver el sistema $\begin{cases} x - y = 6 \dots (i) \\ x + 3y = 2 \dots (ii) \end{cases}$, se puede despejar la variable x de ambas ecuaciones:

$$\begin{aligned} x &= 6 + y \text{ de (i)} \\ x &= 2 - 3y \text{ de (ii)} \end{aligned}$$

Luego, las igualamos y se resuelve la ecuación:

$$\begin{aligned} 6 + y &= 2 - 3y \\ 4y &= -4 \Rightarrow y = -1 \end{aligned}$$

El valor de y se reemplaza en alguna de las ecuaciones (i) o (ii) y se obtiene el valor de la otra variable:
 $x = 5$. Finalmente, el conjunto solución será $CS = \{(5; -1)\}$.

Ejemplo 1

Resuelva el sistema $\begin{cases} 4x + 2y = 12 \dots(i) \\ 3x - y = 4 \dots(ii) \end{cases}$

Para resolver el sistema de ecuaciones lineales, se puede despejar y :

De (i) se obtiene: $y = \dots\dots\dots$

De (ii) se obtiene: $y = \dots\dots\dots$

Luego, se igualan y se resuelve la ecuación:

Finalmente, el CS=.....

Método de sustitución

Este método consiste en despejar una de las variables de una ecuación, reemplazarla en la otra y resolver la ecuación resultante.

Por ejemplo, para resolver el sistema $\begin{cases} a+2b=-3 \dots(i) \\ 3a-b=5 \dots(ii) \end{cases}$, se puede despejar a de (i): $a=-3-2b$ y se reemplaza en (ii): $3(-3-2b)-b=5$.

Luego, se resuelve la ecuación resultante:

$$\begin{aligned} 3(-3-2b)-b &= 5 \\ -9-6b-b &= 5 \\ -7b &= 14 \Rightarrow b = -2 \end{aligned}$$

El valor de b se reemplaza en alguna de las ecuaciones (i) o (ii) y se obtiene el valor de la otra variable: $a = 1$. Finalmente, el conjunto solución será $CS = \{(1; -2)\}$.

Todos los ejemplos anteriores presentan una única solución. Ahora se analizarán algunos ejemplos que presentan el conjunto solución vacío e infinitas soluciones.

Por ejemplo, para resolver el sistema $\begin{cases} \frac{x+y}{2}=3 \dots \text{(i)} \\ 2x+2y=1 \dots \text{(ii)} \end{cases}$, se multiplica (i) por 2 y (ii) por $\frac{1}{2}$ resultando: $\begin{cases} x+y=6 \\ x+y=\frac{1}{2} \end{cases}$.

Luego, se igualan ambas expresiones $x + y$ y se obtiene que $6 = \frac{1}{2}$, lo cual es falso. Por lo tanto, la solución es vacía y se expresa como $CS = \varnothing$.

Ejemplo 4

Resuelva el sistema $\begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1 \dots (i) \\ 6x + 2 = -4y \dots (ii) \end{cases}$

Se multiplica (i) por ... y se ordena (ii).
Luego, se resuelve el sistema resultante:

Finalmente, el CS =

Por ejemplo, para resolver el sistema $\begin{cases} \frac{x+2y}{3}=1 & \dots(i) \\ 2x+2y=3+x & \dots(ii) \end{cases}$, se multiplica (i) por 3 y se ordena (ii)

resultando: $\begin{cases} x+2y=3 \\ x+2y=3 \end{cases}$.

Se observa que el sistema está formado por dos ecuaciones iguales, por tal motivo, presenta infinitas soluciones $\{(1; 1), (3; 0), (5, -1), \dots\}$. Cuando el sistema presenta esta característica, se deben parametrizar las variables, es decir, expresar cada una en términos de una sola letra. Si usamos la letra t , la solución queda parametrizada de la siguiente manera:

$$\begin{cases} y=t \\ x=3-2t \end{cases} \Rightarrow \text{CS} = \{(3-2t;t), t \in \mathbb{R}\}$$

Note que las tres soluciones antes mencionadas se obtienen para $t = 1, 0$ y -1 , respectivamente.

d.
$$\begin{cases} x - 2y = 4m \\ 2x - 3y = -2n \end{cases}$$

Sistema de ecuaciones no lineales

Se llama sistema de ecuaciones no lineales de dos variables a cualquier conjunto de dos ecuaciones en las que al menos una de ellas, no es lineal.

Por ejemplo, para resolver el sistema $\begin{cases} x^2 - y = 3 \dots (i) \\ y = 2 + 4x \dots (ii) \end{cases}$, se reemplaza la variable y de (ii) en (i) reduciendo el sistema a una ecuación cuadrática en x :

$$x^2 - (2 + 4x) = 3$$

Luego de resolver la ecuación, se obtienen los valores de x que la satisfacen:

$$x^2 - 4x - 5 = 0$$

$$(x - 5)(x + 1) = 0$$

$$x - 5 = 0 \vee x + 1 = 0$$

$$x = 5 \vee x = -1$$

Cada valor hallado de x , se reemplaza en (ii) y se obtiene el valor de y que corresponda.

$$x = 5 \Rightarrow y = 22$$

$$x = -1 \Rightarrow y = -2$$

Finalmente, el conjunto solución será $CS = \{(5; 22), (-1; -2)\}$.

Ejemplo 7

Resuelva el sistema $\begin{cases} y^2 + 3x = 3 \dots (i) \\ y + x = 1 \dots (ii) \end{cases}$

Se despeja la variable x de (ii) y se reemplaza en (i). Luego, se resuelve la ecuación cuadrática resultante.

Finalmente, el CS =

Observación. Recuerde que las soluciones de un sistema de ecuaciones de dos variables se expresan como pares ordenados.

Ejemplo 8

Determine el conjunto solución de los siguientes sistemas de ecuaciones no lineales:

a.
$$\begin{cases} (x+2)^2 + y^2 = 8 \\ x + y = 2 \end{cases}$$

b.
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ x^2 - 3y^2 = 5 \end{cases}$$

c.
$$\begin{cases} (x+y)^2 - 3 = (x-y)^2 \\ y = 2 - x \end{cases}$$

A continuación, se presentan algunos problemas de modelación en los que intervienen sistemas de ecuaciones en dos variables.

Problemas de modelación que se resuelven usando sistemas de ecuaciones

Problema 1

Manuel compró dos departamentos: uno en el distrito de Pueblo Libre y el otro en San Miguel. Gastó en total \$ 50 000. Luego de 4 años, vendió el departamento de Pueblo Libre al triple de su valor original, y el departamento de San Miguel, al doble. Si obtuvo en total \$ 130 000 por la venta de ambos departamentos, ¿a cuánto vendió cada uno de ellos?

Se definen las variables x e y como los costos de los departamentos en Pueblo Libre y San Miguel, respectivamente. Luego, se plantea el siguiente sistema de ecuaciones y se resuelve:

$$\begin{cases} x + y = 50\,000 & \dots(i) \\ 3x + 2y = 130\,000 & \dots(ii) \end{cases} \Rightarrow -2(i) + (ii) \Rightarrow \begin{cases} -2x - 2y = -100\,000 \\ 3x + 2y = 130\,000 \end{cases} \begin{array}{c} + \\ \downarrow \end{array}$$

$$x = 30\,000 \Rightarrow y = 20\,000$$

Luego de resolver el sistema por el método de eliminación, se obtiene que el departamento de Pueblo Libre se vendió en \$ 90 000, y el de San Miguel, en \$ 40 000.

Problema 2

Enrique es dueño de una empresa que confecciona camisas. El costo por los materiales como tela, hilo, botones, tinte, etcétera, utilizados para la confección de cada camisa es, aproximadamente, S/ 40. El pago mensual que realiza la empresa por alquiler de local, pago de trabajadores y servicios suma S/ 10 000. Si el costo por confeccionar cada camisa disminuye en S/ 5 y el costo fijo aumenta en S/ 1 000 (manteniendo la misma producción), el costo total mensual de la empresa no varía. ¿A cuánto asciende el costo total mensual de la empresa?

Problema 3

Ana le dice a María: «El día de hoy tengo en Facebook el doble de amigos que tú». A lo que María le responde: «Si mañana acepto las 400 solicitudes de amistad que tengo en espera, tendrías la tercera parte de amigos que yo». ¿Cuántos amigos aceptados en Facebook sumarán Ana y María el día de mañana?

Ejercicios 1.10

Resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones lineales con dos variables y, luego, compruebe su respuesta.

$$1. \begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ 2y + 3x = 21 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} 5x + 2y = 2 \\ 7x + 3y = 6 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} 0,2x + 0,5y = 1,6 \\ -0,3x + 0,4y = -0,1 \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} x + y = 5 \\ ax + 2y = 10 \end{cases}; \text{ donde } a \text{ es constante}$$

$$5. \begin{cases} 2x - 3y = 5b - a \\ 3x - 2y = a + 5b \end{cases}; \text{ donde } a \text{ y } b \text{ son constantes}$$

$$6. \begin{cases} \frac{x}{2} - \frac{y}{3} = 1 \\ \frac{x}{4} - \frac{y}{9} = \frac{2}{3} \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} \frac{2x-5}{3} + \frac{4(y+2)}{5} = x \\ \frac{3x-5}{4} - \frac{y+3}{6} = 3 \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} 3(p-2) + 3q - 7 = 4(p+1) + 2 \\ 8(p-4) - 2(q-6) = p + q - 9 \end{cases}$$

$$9. \begin{cases} 0,3x - 0,6y = 0,18 \\ 0,5x + 0,2y = 0,54 \end{cases}$$

$$10. \begin{cases} 3x + 5y = -14 \\ 2x - 7y = 32 \end{cases}$$

$$11. \begin{cases} 13x + 5y = 0 \\ 2x - 27y = 0 \end{cases}$$

$$12. \begin{cases} x - y = -2 \\ -2x + 2y = 6 \end{cases}$$

$$13. \begin{cases} \frac{3x-5}{4} - \frac{2y+3}{5} = 1 \\ \frac{2x+y}{2} - \frac{y-2x-1}{3} = 13 \end{cases}$$

$$14. \begin{cases} ax+by=2a \\ x+y=\frac{a^2+b^2}{ab} \end{cases}; \text{ donde } a \text{ y } b \text{ son constantes}$$

$$15. \begin{cases} \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 1 \\ \frac{x}{b} - \frac{y}{a} = \frac{a}{b} \end{cases}; \text{ donde } a \text{ y } b \text{ son constantes}$$

$$16. \begin{cases} 15x+4y=42 \\ 51x-19y=45 \end{cases}$$

$$17. \begin{cases} 2x-3y=5m-n \\ 3x-2y=n+m \end{cases}; \text{ donde } m \text{ y } n \text{ son constantes}$$

$$18. \begin{cases} y^2-2y+1=x \\ \sqrt{x}+y=5 \end{cases}$$

$$19. \begin{cases} \frac{x}{y} = \frac{5}{7} \\ x^2+y^2=1 \end{cases} \quad 184$$

$$20. \begin{cases} ax+by=a^2+b^2 \\ bx+ay=2ab \end{cases}; \text{ donde } a \text{ y } b \text{ son constantes}$$

$$21. \begin{cases} p^2-2p-q+4=0 \\ p^2-2p+q-2=0 \end{cases}$$

$$22. \begin{cases} y^2-2y+1=x \\ \sqrt{x}+y=5 \end{cases}$$

$$23. \begin{cases} x^2+y=3 \\ x^2-y=-1 \end{cases}$$

1.11. Intervalos e inecuaciones de primer grado

«Multipolo» se dedica a la producción y venta de polos multicolores. Los costos fijos de la empresa ascienden a \$ 12 000 y la producción de cada polo cuesta \$ 8. El precio de venta por polo en el mercado es \$ 20. ¿Cómo se podría calcular el mínimo número de polos que se deben vender para que la empresa gane más de \$ 10 000? Si la empresa desea ganar menos de \$ 30 000, ¿cuántas unidades como máximo deberá vender?

En el problema no se desea calcular el número de polos vendidos para que la utilidad sea igual a \$ 10 000 o \$ 30 000. Las expresiones «más de» y «menos de» (y otras más), que anteceden a las cifras antes mencionadas, hacen referencia a un símbolo distinto al de igualdad. Estamos en el caso de desigualdades. Se espera después de estudiar del siguiente capítulo, que el alumno sea capaz de resolver inecuaciones lineales aplicando propiedades matemáticas y, además, pueda expresar las soluciones de formas diferentes.

Relación de orden en los números reales

Una desigualdad establece que un número es menor que otro. Sean a y b dos números reales cualesquiera, entonces:

Símbolo	Se lee	También se lee
$a < b$	a menor que b	b mayor que a
$a > b$	a mayor que b	b menor que a
$a \leq b$	a menor o igual que b	b mayor o igual que a
$a \geq b$	a mayor o igual que b	b menor o igual que a

Intervalos

Son subconjuntos de los números reales. Se pueden representar usando desigualdades o, gráficamente, en la recta numérica real. Los intervalos pueden ser de longitud finita o infinita.

De longitud finita (intervalo finito)

Un intervalo es de longitud finita si un subconjunto de los números reales está comprendido entre dos números llamados extremos del intervalo. Según sus extremos, un intervalo finito se puede representar de la siguiente manera:

- Si ambos extremos pertenecen al intervalo, se usan los siguientes símbolos: corchetes $[]$, desigualdades $\leq \geq$ o una bola cerrada $\bullet$, si es gráficamente.
- Si ambos extremos no pertenecen al intervalo, se usan los siguientes símbolos: corchetes, $] [$, desigualdades $< >$ o con una bola abierta $\circ$, si es gráficamente.
- Si uno de los extremos pertenece al intervalo y el otro no, se usa una combinación de los anteriores.

Sean a y b los extremos de un intervalo y x un número arbitrario de dicho intervalo, entonces:

Notación	Desigualdad	Gráfica
$]a;b[$	$a < x < b$	
$[a;b[$	$a \leq x < b$	
$]a;b]$	$a < x \leq b$	
$[a;b]$	$a \leq x \leq b$	

Ejemplo 1

Complete el siguiente cuadro:

	Notación	Desigualdad	Gráfica	¿Cuál es el menor y mayor valor entero del intervalo?
a.	$[-1;3]$	$-1 \leq x \leq 3$		Menor valor = -1 Mayor valor = 3
b.	$[2;5[$	$2 \leq x < 5$		Menor valor = Mayor valor =
c.				Menor valor = Mayor valor =
d.		$-9,3 < x < -3$		Menor valor = Mayor valor =
e.	$]0;4,5]$			Menor valor = Mayor valor =
f.				Menor valor = -5 Mayor valor = 2 Dé una posible respuesta si el intervalo es abierto.

De longitud infinita (intervalo infinito)

Un intervalo es de longitud infinita si un subconjunto de los números reales presenta un extremo a un lado y al otro uno de los infinitos ($+\infty$ o $-\infty$).

Sea a el extremo de un intervalo y x un número que pertenece a dicho intervalo, entonces:

Notación	Desigualdad	Gráfica
$]a; +\infty[$	$x > a$	
$[a; +\infty[$	$x \geq a$	
$] -\infty; a[$	$x < a$	
$] -\infty; a]$	$x \leq a$	

Ejemplo 2

Complete el siguiente cuadro:

	Notación	Desigualdad	Gráfica	¿Cuál es el menor y mayor valor entero del intervalo, si existen?
a.	$[2; +\infty[$	$x \geq 2$		Menor valor = 2 Mayor valor = ----
b.	$] -\infty; -1[$	$-1 > x$		Menor valor = Mayor valor =
c.				Menor valor = Mayor valor =
d.		$-4,9 < x$		Menor valor = Mayor valor =
e.	$] -\infty; 3]$			Menor valor = Mayor valor =
f.				Menor valor = ---- Mayor valor = 4 (Se sabe que el intervalo es abierto). Dé una posible respuesta.

Operaciones con intervalos

Las operaciones básicas que se realizan con intervalos son las de unión ($\cup$) e intersección ($\cap$).

Por ejemplo, sean A y B dos intervalos tales que $A=[2;6[$ y $B=[-3;4]$. Para determinar los intervalos $C=A \cap B$ (conformado por los elementos comunes a A y B) y $D=A \cup B$ (conformado por los elementos que pertenecen a A o a B), primero podemos graficar A y B en la recta numérica (ver figura 1.2).

Figura 1.2

Luego, se obtiene que $C=[2;4]$ y el intervalo $D=[-3;6[$.

Ejemplo 3

Dados los intervalos $M=]0;+\infty[$ y $N=[-4;2]$, determine los intervalos $P=M \cap N$ y $Q=M \cup N$.

Para determinar los intervalos $P=M \cap N$ y $Q=M \cup N$, primero podemos graficar M y N en la recta numérica:

Luego, se obtiene que $P=M \cap N=$

$Q=M \cup N=$

¿Cuál es el mayor y menor número entero de P?

¿Cuál es el mayor y menor número entero de Q?

Ejemplo 4

Responda concretamente y justifique su respuesta.

- a. Dados los intervalos $M=]a;4[$ y $N=[-3;b]$ donde a y b son enteros. Si se sabe que ambos intervalos tienen cinco números enteros, ¿cuál es el valor de $a+b$?

- b. Dados los intervalos $A =]-3;6[$ y $B =]5;7[$, ¿se puede afirmar que el intervalo $P = A \cap B$ no tiene elementos?
- c. Dados los intervalos $D =]1;3[$ y $E =]4;6[$, ¿se puede afirmar que el intervalo $F = D \cup E$ solo tiene dos elementos?

Ejemplo 5

- a. Dados los intervalos $A =]-7;3[$, $B = [-2;7[$ y $C =]0;+\infty[$. Determine D, E, F y G e indique, si existen, el menor y mayor enteros.
- $D = A \cap B \cap C$
 - $E = A \cup B \cup C$
 - $F = (A \cap B) \cup C$
 - $G = (B \cup C) \cap A$
- b. Dados los intervalos $A =]-\infty;-3[$, $B = [-1;5[$ y $C =]2;+\infty[$. Determine D, E, F y G e indique, si existen, el menor y mayor enteros.

i. $D = A \cap B \cap C$

ii. $E = A \cup B \cup C$

iii. $F = (A \cap B) \cup C$

iv. $G = (B \cup C) \cap A$

Inecuaciones

Las inecuaciones son enunciados en los que dos cantidades o expresiones algebraicas se relacionan mediante alguno de los siguientes símbolos: $<$, $>$, $\leq$ o $\geq$. Por ejemplo:

- $x - 2 < 7 - x$
- $x^2 - 5x - 6 > 0$

Conjunto solución (CS)

Son aquellos valores de la variable que hacen verdadera la desigualdad. El conjunto solución se expresa, generalmente, usando intervalos.

Por ejemplo, si se pregunta qué valores de x se pueden reemplazar en la inecuación $x - 1 > 3$, es probable que la primera respuesta sea 5 y, luego, otros números mayores a 5, sin darse cuenta que la inecuación es verdadera para todo $x \in]4; +\infty[$

Para resolver una inecuación, se deben efectuar algunas operaciones para reducirla a otra equivalente, en la que su solución se obtenga de manera directa o quede lista para aplicarle algún método de resolución.

Propiedades de las desigualdades

Para resolver una inecuación lineal con una incógnita, se debe despejar la variable a un lado de la inecuación y las constantes al otro. Las siguientes propiedades permiten efectuar tales operaciones:

1. Si $a < b$, y c es cualquier número real, entonces $a + c < b + c$.
2. Si $a < b$, y c es cualquier número real positivo, entonces: $a \cdot c < b \cdot c$.
3. Si $a < b$ y c es cualquier número real negativo, entonces $a \cdot c > b \cdot c$.

Inecuaciones lineales con una incógnita

Una inecuación lineal en la variable x es aquella que puede escribirse de la forma:

$$ax + b < 0, \text{ donde } a \text{ y } b \text{ son constantes y } a \neq 0.$$

Para resolverla, se debe despejar la variable x utilizando correctamente las reglas vistas anteriormente. Generalmente, se espera que la solución sea un intervalo de valores, pero también puede darse el caso de obtener un conjunto solución vacío o infinitas soluciones.

Por ejemplo, para resolver la inecuación $2(3 - 2x) > -2x - 1$, se deben realizar ciertas operaciones con el fin de despejar x :

$$6 - 4x > -2x - 1$$

$$7 > 2x \Rightarrow \frac{7}{2} > x$$

$$\text{Finalmente, se tiene que el CS} = \left] -\infty; \frac{7}{2} \right[$$

Para resolver la inecuación lineal $\frac{x+1}{2} \leq 2(x-1) < x$, se puede separar en dos inecuaciones y resolver cada una de ellas de forma individual. A continuación, se muestra dicho proceso:

$$\frac{x+1}{2} \leq 2(x-1) \quad \wedge \quad 2(x-1) < x$$

$$x+1 \leq 4x-4 \quad \wedge \quad 2x-2 < x$$

$$5 \leq 3x \quad \wedge \quad x < 2$$

$$\frac{5}{3} \leq x \quad \wedge \quad x < 2$$

La intersección de sus soluciones individuales se muestra gráficamente en la figura 1.3, siendo este el conjunto solución de la inecuación planteada.

Figura 1.3

Por lo tanto, el CS = $\left[\frac{5}{3}; 2 \right]$

Ejemplo 6

Resuelva la inecuación $\frac{x+1}{2}-1>\frac{x-2}{3}$

Se halla el MCM = y se multiplica a ambos términos de la inecuación:

Finalmente, se tiene que el CS=

Ejemplo 7

Responda concretamente y justifique su respuesta.

- a. Dada la inecuación $ax > b$, donde $a < 0 < b$, ¿cuál es el conjunto solución?

- b. ¿El conjunto solución de la inecuación $2(x-2) \leq 2x+3$ es vacío?

- c. ¿Cuál es el conjunto solución de la inecuación

$$x + 3 < \frac{4 + 2x}{2}?$$

This image shows a full page of blank graph paper. The grid consists of thin, light gray horizontal and vertical lines that intersect to form small squares across the entire surface. There are no margins, text, or other markings on the paper.

- d. Dada la inecuación $2x < 3x$, ¿se puede afirmar que el $CS = R$?

Ejemplo 8

Resuelva las siguientes inecuaciones:

a. $\frac{x-2}{3} \geq 2 - \frac{3-2x}{5}$

b. $1 - 2(3-2x) < x + 3(x+1)$

c. $\frac{x+1}{2} \leq \frac{2(x-1)}{4} - 2$

d. $2 \leq \frac{x+1}{3} \leq 2-x$

e. $-4 < \frac{3x+2}{4} \leq 2$

f. $ax + 2 > 5$; si:

i. $a > 0$

ii. $a < 0$

g. $ax - 2 > bx - 3$, si $a < b$

Ejemplo 9

Por ejemplo, para determinar el intervalo al que pertenece x a partir de la expresión $3x - 2 \in [-3; 2]$, se usa la notación de desigualdades:

$$3x - 2 \in [-3; 2] \Rightarrow -3 \leq 3x - 2 \leq 2$$

Luego de sumarle 2 a cada término de la inecuación y multiplicarlo por $\frac{1}{3}$, se obtiene la variable x entre dos números: $-\frac{1}{3} \leq x \leq \frac{4}{3}$

Por lo tanto, $x \in \left[-\frac{1}{3}; \frac{4}{3}\right]$

Problemas de modelación que involucran resolución de inecuaciones

A continuación, se utilizarán las inecuaciones lineales en problemas de modelación.

Problema 1

«Multipolo» se dedica a la producción y venta de polos multicolor. Los costos fijos de la empresa ascienden a \$ 12 000 y el costo de cada polo, a \$ 8. El precio de venta por polo en el mercado es \$ 20.

- a. Determine las ecuaciones de costo e ingreso de la empresa en términos del número de polos producidos y vendidos.

Las ecuaciones de costo e ingreso son $C = 12\,000 + 8q$ e $I = 20q$, respectivamente, donde q es el número de polos producidos y vendidos.

- b. ¿Cuál es el mínimo número de polos que se deben vender para que la empresa gane más de \$ 30 000?

Primero, se obtiene la ecuación de utilidad.

$$U = I - C = 20q - (12\,000 + 8q) \Rightarrow U = 12q - 12\,000$$

Luego, se plantea la siguiente inecuación y se resuelve:

$$U = 12q - 12\,000 > 30\,000 \Rightarrow q > 3\,500$$

Finalmente, se deben producir y vender 3 501 polos. Se agrega un polo más a la respuesta porque con 3 500 polos la ganancia es \$ 30 000 y no mayor.

Problema 2

Se ha modelado el costo C (en dólares) de una empresa con la siguiente ecuación: $C = 250x + 30\,000$, donde x es el número de televisores producidos. Se sabe, además, que cada televisor se vende a \$ 480, y que todo lo que se produce se vende. La empresa quiebra si pierde dinero y se espera ganar como máximo \$ 620 000.

- a. ¿Cuáles son los números mínimo y máximo de televisores que se deben producir y vender para que la empresa no quiebre?

- b. ¿Cuál es el máximo número de televisores producidos y vendidos que ocasionarían que la empresa quiebre?

Problema 3

José se dedica a elaborar y vender helados de lúcumas. Gasta, aproximadamente, S/ 1,8 en la compra de lúcumas, leche, azúcar, palitos y envolturas para preparar cada helado. También le paga a su mamá S/ 200 mensuales por el uso de la refrigeradora. El mes pasado su ingreso fue menor a S/ 1 512, pero ganó más de S/ 400. Si José vende cada helado a S/ 3, ¿cuántos helados pudo haber vendido el mes pasado?

Ejercicios 1.11

Determine el conjunto solución, en notación de intervalo, y representación, en forma geométrica, sobre la recta de los números reales, para los ejercicios del 1 al 20.

1. $3 - 5x \leq 11$

2. $x - 8 > 5x + 3$

3. $4 + 9x \geq -2 + 7x$

4. $\frac{1}{4}x + 7 \leq \frac{1}{3}x - 2$

5. $4 \geq 3x + 5 > -1$

6. $\frac{2}{3}x + 1 > \frac{1}{2}x - 3$

7. $3(x - \frac{2}{5}) \leq 5x - \frac{1}{3}$

8. $5 - 3x < 13 + 3x$

9. $4x - \frac{1}{3} \leq 2x + \frac{3}{4}$

10. $-14 \leq 4x - 2 \leq 14$

11. $\frac{3}{5}x + \frac{1}{2} \leq \frac{2}{3} - \frac{5}{6}x$

12. $5x - 3 < 18 - 2x \leq 7x + 9$

13. $-2 < 3 + \frac{1}{4}x \leq 5$

14. $\frac{2-x}{3} < \frac{2x-3}{5} < \frac{1+3x}{2}$

15. $3x + 5 \leq 12 \leq 4 - 5x$

16. $2x(6x + 5) < (3x - 2)(4x + 1)$

17. $\frac{4}{3x+2} \geq 0$

18. $\frac{-2}{4-3x} < 0$

19. $\frac{-3}{2-x} < 0$

20. $a^2x - a \leq b^2x - b$, si $a < b < 0$

21. La empresa de «Don Jorge» se dedica a la producción y venta de casacas. Los costos fijos ascienden a \$ 12 000. El costo de cada casaca es \$ 20 y el precio de venta, \$ 50. ¿Cuántas casacas como mínimo se deben vender para obtener una ganancia mayor a \$ 30 000?

22. Los costos fijos de una empresa ascienden a \$ 15 000 y producir 625 relojes genera un costo de \$ 40 000. Si cada reloj se vende a \$ 100, ¿cuántos relojes como mínimo se deben vender para ganar más de \$ 30 000?

23. El costo de producir refrigeradoras se modela con la siguiente ecuación: $C = 200x + 40\,000$. Si cada refrigeradora se vende a \$ 450, ¿cuántas refrigeradoras se deben vender para obtener ganancias que no sean mayores a \$ 3 500?

24. El señor Pablo no sabe si alquilar una camioneta o un auto por un mes. El alquiler de una camioneta es de \$ 400 por mes y consume \$ 0,8 por kilómetro recorrido. Alquilar un auto cuesta \$ 300 al mes y consume \$ 0,9 por kilómetro recorrido. ¿A partir de qué kilometraje se justifica la compra de una camioneta?

1.12. Inecuaciones polinomiales y racionales

Suponga que la ecuación $U = -2q^2 + 200q - 1\,000$ permite calcular la utilidad (en dólares) que genera la producción y venta de q unidades de un producto. ¿Cómo se podría determinar el número de unidades que se deben vender para obtener una ganancia de por lo menos \$ 3 000?

Primero, se debe distinguir del problema la expresión *por lo menos*, que dentro del contexto significa «mayor o igual». Esto permitirá plantear la siguiente inecuación: $-2q^2 + 200q - 1\,000 \geq 3\,000$. Note que la expresión es una cuadrática; por eso, surge aquí una nueva pregunta: ¿qué método permitirá resolver este tipo de inecuaciones?

Método de puntos de referencia

Es un método que se aplica en la resolución de inecuaciones polinómicas y racionales. Se basa en la ley de signos para el producto (o división) de dos números reales:

$$\begin{cases} \text{Si } a > 0 \text{ y } b > 0 \Rightarrow a \cdot b > 0 \\ \text{Si } a > 0 \text{ y } b < 0 \Rightarrow a \cdot b < 0 \\ \text{Si } a < 0 \text{ y } b > 0 \Rightarrow a \cdot b < 0 \\ \text{Si } a < 0 \text{ y } b < 0 \Rightarrow a \cdot b > 0 \end{cases}$$

Para aplicar este método, es necesario pasar todos los términos a un lado de la desigualdad y luego factorizar la expresión algebraica. Esto permitirá encontrar los valores de la variable que hacen cero cada factor. A continuación, se plantea una expresión factorizada que servirá como guía en nuestra explicación:

$$\begin{array}{ccc} (x+2)(x-3) & & \\ \downarrow & \downarrow & \\ x+2=0 & \vee & x-3=0 \\ x=-2 & \vee & x=3 \end{array}$$

Los números -2 y 3 son llamados valores de referencia y son los únicos valores que hacen que la expresión sea cero. Esto implica que la expresión será un número con signo (dependiendo de los signos de cada factor) para el resto de valores reales.

Al ubicar estos valores referenciales en la recta real, se generan tres intervalos abiertos: I_1 , I_2 e I_3 (ver figura 1.4).

Figura 1.4

Cabe destacar que, en cada intervalo abierto, cada uno de los factores es positivo o negativo.

El objetivo de aplicar el método de puntos de referencia es encontrar el signo de la expresión en cada uno de los intervalos generados por los valores referenciales. En la siguiente tabla, tabulamos algunos valores de x de cada intervalo para ver los signos de la expresión:

x	-5	-4	-3	-1	0	1	2	4	5	6
$(x+2)(x-3)$	24	14	6	-4	-6	-6	-4	6	14	24

$\underbrace{\hspace{10em}}_{I_1} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{I_2} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{I_3}$

Por lo tanto, para determinar el signo de la expresión, se tabula un valor arbitrario de cada intervalo en cada uno de los factores.

Finalmente, se concluye que la expresión $(x+2)(x-3)$ es positiva en la unión de intervalos $]-\infty; -2[\cup]3; +\infty[$ y negativa en el intervalo $]-2; 3[$.

Inecuaciones polinomiales

Son inecuaciones de la forma $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 < 0$, donde $a_n \neq 0$ (también puede expresarse con los símbolos $>, \leq$ o $\geq$).

Por ejemplo, para resolver la inecuación factorizada $(1-x)(x+3)^2 \geq 0$, primero se hallan los valores referenciales:

$$(1-x)=0 \Rightarrow x=1$$

$$(x+3)^2=0 \Rightarrow x=-3$$

Luego, se ubican dichos valores en la recta para determinar los signos del polinomio en cada intervalo (el procedimiento se muestra en la tabla inferior).

Intervalo	Valor arbitrario	Evaluación	Signo
$]-\infty; -3[$	$x = -4$	$(1 - (-4))(-4 + 3)^2 = 5$	+
$]-3; 1[$	$x = 0$	$(1 - 0)(0 + 3)^2 = 9$	+
$]1; +\infty[$	$x = 2$	$(1 - 2)(2 + 3)^2 = -25$	-

Figura 1.5

Finalmente, se tiene que el CS = $]-\infty; 1]$

Observación. En la gráfica de la figura 1.5, se coloca una bolita cerrada en los valores referenciales porque al reemplazarlos en la expresión se obtiene que $0 \geq 0$ y es correcta.

d. ¿Cuál es el conjunto solución de $(x-5)^2 > 0$?

e. ¿Se puede afirmar que $x^2 > 4$ y $x > 2$ tienen el mismo conjunto solución?

f. ¿Se puede afirmar que el conjunto solución de $x(x+1) > x(x+2)$ es vacío?

Ejemplo 3

Determine el conjunto solución de las siguientes inecuaciones:

a. $(2-x)^2(5-x) < 0$

b. $x^2(x-4)(1+x) \geq 0$

c. $9x > x^3$

d. $(x-2)^2 \geq 2x(x-2)$

e. $x^3 - 4x^2 + x - 4 \leq 0$

f. $(x+3)(x-2) \leq 6$

g. $(x-3)^2 > 9$

Inecuaciones racionales

Son inecuaciones de la forma $\frac{P(x)}{Q(x)} > 0$, con $P(x)$ y $Q(x)$ polinomios y $Q(x) \neq 0$ (también puede expresarse con los símbolos $<, \leq$ o $\geq$).

Por ejemplo, para resolver la inecuación factorizada $\frac{(4-x)^2}{(1-x)} \geq 0$, primero se hallan los valores referenciales:

$$(4-x)^2 = 0 \Rightarrow x = 4$$

$$(1-x) = 0 \Rightarrow x = 1$$

Luego, se ubican dichos valores en la recta para determinar los signos de la expresión en cada intervalo (el procedimiento se muestra en la tabla de la siguiente página).

Intervalo	Valor arbitrario	Evaluación	Signo
$]-\infty;1[$	$x=0$	$\frac{(4-0)^2}{(1-0)}=16$	+
$]1;4[$	$x=2$	$\frac{(4-2)^2}{(1-2)}=-4$	-
$]4;+\infty[$	$x=5$	$\frac{(4-5)^2}{(1-5)}=-\frac{1}{4}$	-

Figura 1.6

Finalmente, el CS = $]-\infty;1[\cup \{4\}$

Observación. En la gráfica de la figura 1.6, se coloca una bolita cerrada en $x=4$ porque al reemplazarlo en la expresión se obtiene que $0 \geq 0$ y es correcto. Por el contrario, se coloca una bolita abierta en $x=1$ porque no pertenece al CVA.

Uno de los errores frecuentes cometidos en esta parte es pensar que el desarrollo de inecuaciones racionales es similar al desarrollo de ecuaciones racionales. Vea lo que sucede en la inecuación anterior si se multiplica por el mínimo común múltiplo (MCM) del denominador:

$$(1-x) \cdot \frac{(4-x)^2}{(1-x)} \geq (1-x) \cdot 0 \Rightarrow (4-x)^2 \geq 0$$

Se obtiene que el CS = $\mathbb{R} - \{1\}$ lo cual es falso.

En inecuaciones racionales usamos el concepto de MCM para reducir la suma o resta de expresiones racionales en una sola fracción. Eliminar los denominadores generalmente implica una pérdida de posibles soluciones.

Ejemplo 4

Resuelva la inecuación $\frac{2x}{x+1} > 1$

Se tiene que expresar como una sola fracción a un lado y el cero al otro:

$$\frac{2x}{x+1} - 1 > 0 \Rightarrow \frac{2x - (x+1)}{x+1} > 0 \Rightarrow \frac{x-1}{x+1} > 0$$

Luego, se determinan los valores referenciales, se ubican en la recta y se hace el análisis de signos. (Se sugiere usar un cuadro).

Intervalo	Valor arbitrario	Evaluación	Signo

Finalmente, el CS=

Ejemplo 5

Responda concretamente y justifique su respuesta.

- a. ¿El conjunto solución de $\frac{1}{x} > 0$ es $\mathbb{R} - \{0\}$?
- b. ¿Se puede afirmar que $\frac{x-1}{x} < \frac{2}{x}$ y $x < 3$ tienen el mismo conjunto solución?
- c. ¿Cuál es el conjunto solución de $\frac{x^2}{x^2+4} \leq 0$?

This image shows a full page of blank graph paper. The grid consists of thin, light gray horizontal and vertical lines that intersect to form a uniform pattern of small squares across the entire surface. There are no margins, text, or other markings present.

Ejemplo 6

Resuelva las siguientes inecuaciones:

a. $\frac{(-x+5)^3}{x^2(x^2+16)} \geq 0$

b. $\frac{1-x}{x^2-9} < 0$

c. $\frac{x^2+2x+1}{x^2} \leq \frac{4}{x}$

d. $\frac{9}{6x-x^2} \leq 1$

Por ejemplo, para determinar el intervalo al que pertenece x a partir de la expresión $x^2 - 1 \in] 3; +\infty [$, primero se utiliza la notación de desigualdades:

$$x^2 - 1 \in] 3; + \infty [\Rightarrow x^2 - 1 > 3$$

Luego, se resuelve la inecuación polinómica mediante el método de puntos de referencia:

$$\begin{aligned}x^2 - 1 > 3 &\Rightarrow x^2 - 4 > 0 \\(x - 2)(x + 2) &> 0\end{aligned}$$

Figura 1.7

Por lo tanto, a partir de gráfica de la figura 1.7, se concluye que $x \in]-\infty; -2[\cup]2; +\infty[$

Ejemplo 7

Determine el o los intervalos al que pertenece x a partir de la expresión $\frac{1}{x} \in]-\infty; 2]$

Primero se utiliza la notación de desigualdades:

$$\frac{1}{x} \in]-\infty; 2] \Rightarrow \dots\dots\dots \text{Luego se resuelve:}$$

Finalmente, $x \in \dots$

Ejemplo 8

- a. Se sabe que $6 - x^2 \in [-3; +\infty[$, ¿a qué intervalo(s) pertenece x ?

- b. Se sabe que $\frac{x+2}{x} \in [-1; 1[$, ¿a qué intervalo (s) pertenece x ?

Ejercicios 1.12

Resuelva las siguientes inecuaciones:

1. $3x - x^2 \geq 0$

2. $x^2 \geq 8x - 15$

3. $x(2x + 3) \geq 5$

4. $(x + 1)^2 > x^2 + 2x$

5. $x^2 + 5x > 36$

6. $x^2 + x + 1 > 0$

7. $x(x - 4) < 8$

8. $2x(2 - x)(3x + 7) \leq 0$

9. $x^2 - 3x - 28 < 0$

10. $2x^2 + 5x - 12 \geq 0$

11. $x^2 + 2x + 7 > 0$

12. $(x - 1)^2 < 6$

13. $(x + 2)(x - 1)(x + 3) \geq 0$

14. $4x(1 + x) + 1 \leq 0$

15. $12x - 9 > 4x^2$

16. $(x + 1)(x - 2)^2(x + 4) < 0$

17. $\frac{3x}{x - 2} \geq 5$

18. $0 < \frac{-2}{3x - 1}$

19. $\frac{12}{x} < \frac{4}{5}$

20. $\frac{x + 5}{x + 3} \leq \frac{x + 6}{x + 1}$

$$21. \frac{(x-5)(x^2-9)}{(x^2-4x+21)(x^2+25)} \geq 0$$

$$22. \frac{(x-2)^2(x-6)}{(x-4)^4} \geq 0$$

$$23. \frac{-a}{2x+1} \leq 0, \text{ si } a > 0$$

Para poder revisar todo el contenido de esta edición,
visite nuestra **tienda virtual**.