Fundamentos de matemática

Introducción al nivel universitario

Juan Raúl Egoavil Vera

Fundamentos de matemática

Introducción al nivel universitario

Lima, marzo de 2014

Universidad Peruana de Ciencias Aplicadas

Juan Raúl Egoavil Vera

© Universidad Peruana de Ciencias Aplicadas (UPC)

Primera publicación: marzo de 2014

Impreso en el Perú - *Printed in Peru*

Corrección de estilo: Silvana Velasco

Diseño de cubierta: Germán Ruiz Ch.

Diagramación: Diana Patrón Miñán

Editor del proyecto editorial

Universidad Peruana de Ciencias Aplicadas S. A. C.

Av. Alonso de Molina 1611, Lima 33 (Perú)

Teléf: 313-3333

www.upc.edu.pe

Primera edición: marzo de 2014

Universidad Peruana de Ciencias Aplicadas (UPC)
Centro de Información

Egoavil Vera, Juan Raul. Fundamentos de Matemáticas. Introducción al nivel universitario

Lima: Universidad Peruana de Ciencias Aplicadas (UPC), 2014

ISBN: 978-612-4191-26-8

ISBN de la versión e-book en PDF: xxxxxxxxxxxxxx

MATEMÁTICAS, ARITMÉTICA, ÁLGEBRA, GEOMETRÍA, TRIGONOMETRÍA, EJERCICIOS
DE APLICACIÓN

510 EGOA

Todos los derechos reservados. Esta publicación no puede ser reproducida, ni en todo ni en parte, ni registrada en o transmitida por un sistema de recuperación de información, en ninguna forma ni por ningún medio, sea mecánico, fotoquímico, electrónico, magnético, electroóptico, por fotocopia o cualquier otro, sin el permiso previo, por escrito, de la editorial.

El contenido de este libro es responsabilidad del autor y no refleja necesariamente la opinión de los editores.

| Contenido

Agradecimientos	6
Prólogo	7
Introducción	8
Unidad 1. Fundamentos de Aritmética	10
Conjuntos numéricos	11
Números racionales	33
Razones y proporciones	56
Magnitudes y reparto proporcional	66
Regla de tres simple y compuesta	81
Porcentajes	89
Repasemos lo aprendido en la Unidad 1	105
Unidad 2. Fundamentos de Álgebra	110
Teoría de exponentes y radicales	111
Expresiones algebraicas	125
Productos notables	141
Ecuaciones de primer grado	150
Ecuaciones exponenciales y logarítmicas	162
Sistema de ecuaciones lineales	172
Sistema de factorización algebraica	188
Ecuaciones cuadráticas	212
Expresiones y ecuaciones racionales	222
Ecuaciones irracionales	236
Ecuaciones polinómicas	246

Desigualdades e intervalos	258
Inecuaciones	271
Repasemos lo aprendido en la Unidad 2	282
Unidad 3. Fundamentos de Geometría y Trigonometría	289
Segmentos de recta	292
Ángulos	302
Triángulos	318
Cuadriláteros	344
Polígonos	356
Circunferencia y círculo	366
Sistema de medidas angulares	380
Razones trigonométricas	388
Introducción a la Geometría Analítica	402
Ecuación de la recta	419
Ecuación de la circunferencia	425
Ecuación de la parábola	436
Perímetro y área de figuras planas	449
Áreas y volúmenes de cuerpos geométricos	466
Repasemos lo aprendido en la Unidad 3	485
Bibliografía	495

| Agradecimientos

Quiero agradecerte, en primer lugar, a ti, Dios mío, por bendecirme y haberme dado la oportunidad de llegar hasta donde he llegado y porque hiciste realidad este sueño anhelado.

Quiero agradecer, también, a las autoridades de la Universidad Peruana De Ciencias Aplicadas (UPC) por darme la oportunidad de desarrollarme como profesional y por confiar en mi persona para la elaboración de este material bibliográfico.

Agradezco, también, al Director del área de Ciencias de la UPC: ingeniero Fernando Sotelo Raffo por su esfuerzo y dedicación, quien con sus conocimientos, su experiencia, su paciencia y su motivación ha logrado en mí que pueda adaptarme de la mejor manera a la labor educativa. Primero, como docente y, luego, como coordinador. Ahora, solo me queda retribuir tal confianza con la elaboración de este libro.

De igual manera, deseo agradecer al ingeniero Héctor Viale Tudela por su visión crítica de muchos aspectos cotidianos de la vida; por su rectitud en su profesión como director y como docente; y por sus consejos que me ayudaron a formarme como persona, como docente y como investigador.

Son muchas las personas que han formado parte de mi vida profesional a las que desearía agradecer por su amistad, consejos, apoyo, ánimo y compañía en los momentos más difíciles de mi vida. Algunas están aquí conmigo y otras en mis recuerdos y en mi corazón pero, sin importar dónde estén, quiero darles las gracias por formar parte de mi vida; por todo lo que me han brindado y por todas sus bendiciones.

Agradezco a mi familia por su apoyo firme y constante durante estos años, a mis padres quienes me infundieron la ética, el cariño a Dios y el amor con el que voy transitando por esta vida. Agradezco también a Isabel, fiel amiga y compañera, que me ha ayudado a continuar, haciéndome vivir los mejores momentos a su lado. Y dedico esta obra a mis hijas, Daniela y Esmeralda, por ser la razón de mi existir.

Prólogo

Fundamentos de matemática. Introducción al nivel universitario, es un libro que desarrolla una forma innovadora en el aprendizaje, para que los participantes en el ciclo de preparación se familiaricen con los principios de Aritmética, Álgebra, Geometría y Trigonometría. En este libro, el autor entrega al alumno del ciclo de preparación un compendio de ejercicios de cálculo y de modelamiento que le serán muy útiles en los cursos de Matemática de su carrera.

Este libro prepara a los recién ingresantes en la metodología que la Universidad Peruana de Ciencias Aplicadas (UPC) utiliza para los cursos de Matemática a nivel universitario. Dicha metodología es fruto de la experiencia de los profesores de la UPC y convierte en actor del aprendizaje al mismo alumno, a través del continuo ejercicio del cálculo y de la modelación de situaciones en pleno transcurrir de la propia clase. El alumno aprende mejor haciendo, por esto a lo largo del libro hay múltiples ejercicios para que su intervención sea activa y permanente.

A través de la metodología planteada a lo largo del libro, el autor captura la atención de los alumnos del curso y logra que cada uno de ellos participe constantemente en la clase, resolviendo ejercicios y respondiendo a las preguntas planteadas en cada tema. Hacerlo, indudablemente, favorece el aprendizaje y logra insertar al estudiante en su propio proceso de aprendizaje. Los resultados que se obtienen serán mejores a medida que este se identifique con la necesidad de su propio involucramiento en el proceso de enseñanza aprendizaje.

En suma, este libro proporciona a los estudiantes del ciclo de preparación universitaria una herramienta muy positiva para mejorar los resultados que puedan lograr en el curso. Además, les permite familiarizarse con una metodología presente en los cursos de nivel universitario que posteriormente estudien.

Fernando Sotelo
Director del Área de Ciencias
Universidad Peruana de Ciencias Aplicadas

Introducción

El objetivo de este libro es ofrecer a los estudiantes del ciclo preuniversitario, así como a los de nivelación una introducción clara, sencilla y general a la teoría matemática, utilizando ejercicios y problemas aplicados a las diferentes carreras profesionales que ofrece la UPC.

Pero, es conveniente explicar porqué un nuevo libro de Matemática. En primer lugar, durante mi experiencia docente en diferentes universidades, observé que en el proceso de enseñanza los docentes usamos libros que no invitan a la lectura y a la investigación. En general, estas explicaciones resultan ajenas a la realidad económica nacional a la cual nos enfrentamos cotidianamente, limitando los alcances y comprensión de los diferentes temas que abordamos en clase. Este es un sentir común y recurrente en conversaciones y discusiones en las universidades entre los profesores de esta disciplina. A partir de esta preocupación, nació la idea de elaborar un texto que abarque estas demandas.

Así, el texto que el lector tiene en sus manos busca iniciarlo en la curiosidad de saber algunos aspectos matemáticos, algunas curiosidades y sobre todo conocer páginas web en las cuales podrán reforzar los temas tratados sencilla y claramente, elevando el gusto por esta hermosa ciencia.

Las matemáticas nos ayudan a resolver problemas básicos o complejos que tradicionalmente se aprenden resolviendo problemas sencillos al principio, después estos se sistematizan para solucionar problemas más complicados. Por ejemplo, para resolver ecuaciones algebraicas, es imprescindible saber sumar, restar, multiplicar y dividir, conocer el orden de los pasos, evaluar expresiones y saber cómo y cuándo se aplican las ecuaciones.

En nuestra etapa como estudiantes debemos tomar cursos de matemática al menos 12 años, las bases que tengamos en cada uno de ellos nos ayudarán a enfrentar los siguientes. Pero, si estas son deficientes ocasionan graves problemas para los estudiantes e incluso en algunos casos los llevan a decidirse por estudiar carreras con la menor carga matemática posible.

Entonces, no son necesarias únicamente para obtener una calificación aprobatoria y pasar de año, sino para ingresar y permanecer en la universidad, pues en muchas instituciones de educación superior de nuestro país, los procesos de admisión son duros y solo son aceptados los estudiantes con los más altos puntajes.

Aprender matemáticas es importante si el estudiante considera ir a la universidad. Las habilidades que aprenda en estos cursos son aplicables en todos los trabajos. Aun si no quiere estudiar alguna carrera del área de las ciencias naturales y exactas, la mayoría de los empleos para recién egresados requieren que las personas contratadas cuenten con conocimientos básicos de matemática.

Algunas de las habilidades que se adquieren a través de su estudio son:

- La capacidad para identificar y analizar patrones.
- Capacidad de pensamiento lógico y reflexivo.
- Pericia para visualizar relaciones.
- Capacidad para resolver problemas.

El libro está dividido en tres unidades: la primera llamada Fundamentos de Aritmética, ofrece un conjunto de temas importantes (conjuntos numéricos, números racionales, razones y proporciones, magnitudes proporcionales, reparto proporcional, regla de tres simple y compuesta y porcentajes) que el estudiante debe conocer al detalle, pues si bien es cierto dichos temas han sido tratados en el nivel escolar, requieren ser repasados y profundizados.

En la segunda unidad, nos ocupamos de los Fundamentos del Álgebra. En este caso, desarrollamos detallada, clara y profundamente temas en los cuales los estudiantes siempre tienen dificultad (teoría de exponentes y radicales, ecuaciones exponenciales y logarítmicas, expresiones algebraicas, productos notables, racionalización, ecuaciones de primer grado, sistema de ecuaciones lineales, factorización, ecuaciones de segundo grado, expresiones racionales, ecuaciones racionales, ecuaciones irracionales, ecuaciones polinómicas, desigualdades, intervalos e inecuaciones) ya que la experiencia adquirida me dice que los estudiantes tienen mucha dificultad al desarrollar ejercicios.

En la tercera y última unidad se desarrollan los Fundamentos de Geometría y Trigonometría. En esta parte se abordan temas básicos como son: segmento de recta, ángulos, triángulos, cuadriláteros, polígonos, circunferencia y círculo, sistema de medidas angulares, razones trigonométricas, introducción a la geometría analítica, ecuación de la recta, ecuación de la circunferencia, ecuación de la parábola, perímetro y áreas de figuras planas y áreas y volúmenes de cuerpos geométricos. Dichos temas forman parte importante dentro de la formación de los estudiantes y los alumnos deben conocerlos más aún quienes están a un paso de la vida universitaria.

Mg. Juan Egoavil Vera

Unidad 1

Fundamentos de Aritmética

Conjuntos numéricos

Los conjuntos numéricos a lo largo de la historia

Aunque hoy nos es muy familiar el concepto de número, este fue elaborado muy lentamente a través de los tiempos.

En el siglo XXII a. de C para poder realizar importantes obras, los babilonios tuvieron que desarrollar un sistema de numeración útil, el mismo era de base 60 (a diferencia del actual, que es de base 10).

Los chinos también conocían las fracciones, y sabían reducir a común denominador. Llamaban «hijo» al numerador, y «madre» al denominador.

La escuela pitagórica (siglo V a. de C.) descubrió que solo con los números naturales y las fracciones no podían realizarse todas las medidas posibles. Existían pares de segmentos, como la diagonal y el lado de un cuadrado, cuyo cociente de longitudes no es una fracción y llamaron a tal razón «alogs» o irracional. Hacia el año 500, en la India se plasmaron los orígenes de nuestro sistema de numeración, aceptaron las soluciones negativas de las ecuaciones, al tiempo que admitían como números las raíces de otros números que no podían ser expresados mediante números racionales.

Durante el siglo XVI, se popularizó el uso de la barra horizontal para separar los términos de una fracción, se solucionaban algunos problemas y surgían otros como por ejemplo resolver ecuaciones de segundo grado y otras de grado mayor. Empezaron a encontrarse expresiones como la raíz cuadrada de números negativos que no se sabían interpretar, de aquí surge un nuevo tipo de números, que denominaron ficticios, como solución a las raíces cuadradas de números negativos.

El problema de los números irracionales no se resolvió por completo hasta el siglo XVII, cuando Fermat, matemático francés que puede ser considerado el padre de la moderna teoría de números, demostró que expresiones como raíz cuadrada de 3 no eran números racionales.

Solo quedaba por resolver el problema de las raíces negativas; y esto ocurrió en 1777, cuando Euler dio a la raíz cuadrada de -1 el nombre de i (imaginario) y en 1799, Gauss acabó de resolver el problema al demostrar que las soluciones de cualquier ecuación algebraica, fuera cual fuese su grado, pertenecía a un conjunto de números que él llamó complejos, a los que consideró compuestos de un número «ordinario» (hoy lo llamamos número real), más un múltiplo de la raíz cuadrada de -1 , llamado unidad imaginaria.

Extracto tomado de ECURED (2014) Conjuntos numéricos (consulta: 20 de enero) (http://www.ecured.cu/index.php/Conjuntos_num%C3%A9ricos)

Objetivos

- Definir los conjuntos numéricos.
- Distinguir las diferencias que existen entre un número racional e irracional, o entre un número real y complejo.

Introducción

Un número es una idea que expresa una cantidad, ya sea por medio de una palabra o de un símbolo y recibe el nombre de numeral.

A lo largo de la historia, cada civilización adoptó un sistema de numeración propio. En la actualidad aún se usa el de numeración romana, que se desarrolló en la antigua Roma y se utilizó en todo su imperio. Es un sistema de numeración no posicional en el que se usan letras mayúsculas como símbolos para representar cantidades:

I: uno
V: cinco
X: diez
L: cincuenta
C: cien
D: quinientos
M: mil

Actualmente, el sistema universalmente aceptado (excepto algunas culturas) es el Sistema de Numeración Decimal en el que las cantidades se representan utilizando como base el número diez 10 , por lo que se compone de las cifras cero (0), uno (1), dos (2), tres (3), cuatro (4), cinco (5), seis (6), siete (7), ocho (8) y nueve (9). Este conjunto de símbolos se denomina números árabes.

Los números se agrupan en conjuntos o estructuras diversas cada una relacionada con la otra y es más completa y con mayores posibilidades en sus operaciones.

Gráfico 1.1 Tipos de conjuntos numéricos

1. Números naturales

DEFINICIÓN: son los que usamos para contar u ordenar los elementos de un conjunto no vacío.

SIMBÓLICAMENTE: $N = \{1; 2; 3; \dots; n; n+1\}$

Están ordenados en forma creciente, lo que nos permite representarlos sobre una recta del siguiente modo:

Actividad 1.1:

- ¿Se puede afirmar que todo número natural tiene un antecesor? ¿Por qué? Ejemplifique.

.....

.....

- ¿Se puede afirmar que todo número natural tiene un sucesor? ¿Por qué? Ejemplifique.

.....

.....

2. Números enteros

Para solucionar el problema que se presenta al restar números naturales donde el minuendo es igual o menor al sustraendo, se agrega el número cero y los números opuestos a los naturales.

De ese modo $3 - 3 = 0$ (cero) y $3 - 7 = -4$ (opuesto de 4).

DEFINICIÓN: el conjunto de los Números Enteros está formado por la unión de los Naturales, el cero y los opuestos de los Números Naturales.

SIMBÓLICAMENTE: $Z = \{\dots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$

En general si a es un entero, se dice que, $-a$ es el opuesto de a .

Los números enteros permiten representar nuevos tipos de cantidades (como los saldos acreedores o deudores) y ordenar por encima o por debajo de un cierto elemento de referencia (las alturas sobre o bajo el nivel del mar o temperaturas superiores o inferiores a 0 grados, los pisos de un edificio por encima o por debajo de la planta baja, etcétera).

Nota: al conjunto $\mathbb{N}_0 = \{0; 1; 2; 3; \dots\}$ que como se ve tiene como elementos al cero y a los números naturales se le denomina conjunto de los números cardinales.

Operaciones en $\mathbb{Z}$

La suma y el producto de números enteros es siempre otro número entero.

Ejemplos:

$$3 + 7 = 10$$

$$3 + (-7) = -4$$

$$(-3) + 7 = 4$$

$$(-3) + (-7) = -10$$

$$3 \cdot 7 = 21$$

$$3 \cdot (-7) = -21$$

$$(-3) \cdot 7 = -21$$

$$(-3) \cdot (-7) = 21$$

La diferencia $a - b$ es considerada como la suma del minuendo más el opuesto del sustraendo. $a - b = a + (-b)$, donde a es el minuendo y b es el sustraendo.

Ejemplos:

$$3 - 7 = 3 + (-7) = -4$$

$$3 - (-7) = 3 + 7 = 10$$

$$(-3) - 7 = (-3) + (-7) = -10$$

$$(-3) - (-7) = (-3) + 7 = 4 \neq 3 + 7 = 10$$

La división entre números enteros nos arroja como resultados dos números enteros llamados cociente y resto.

Si denotamos con a al dividendo, con b al divisor, con q al cociente y con r al resto, se tendrá que al dividir a entre b , el cociente q indica las veces que b está contenido en a , pudiendo quedar un resto r positivo o nulo. Esto se expresa con la siguiente igualdad: $a = q \cdot b + r$, $0 \leq r < |b|$.

La división $a:b$ es la operación que representa la acción de repartir a elementos de un conjunto en b partes iguales, quedando en muchos casos un residuo no nulo. En todos los casos q y r son únicos.

Ejemplos:

1. Al repartir 32 caramelos entre 3 hermanitos, a cada uno les tocan 10 caramelos y sobrarán 2. Simbólicamente se tendrá: $32 = 3 \cdot 10 + 2$.
2. Si se quiere repartir una deuda de \$ 45 en 8 personas, a cada una le corresponderá pagar \$ 6 quedando un dinero a favor de \$ 3. Esto se expresa formalmente diciendo que la división de -45 entre 8 arroja un cociente -6 y resto 3 pues $-45 = 8 \cdot (-6) + 3$.

Actividad 1.2:

Complete:

- La suma de dos números enteros da siempre un número
Anote dos ejemplos:
- La multiplicación de dos números enteros da siempre un número
Anote dos ejemplos:

3. Números racionales

¡Dividir es repartir en partes iguales!

Un grupo de 6 amigos juega a las cartas con un mazo de 52 cartas.

El juego consiste en repartir todas las cartas y dejar el resto en el centro de la mesa. ¿Cuántas cartas le corresponden a cada uno? ¿Cuántas cartas quedan en el centro?

¡Tú puedes deducir la respuesta!

DEFINICIÓN: son los que se pueden escribir como el cociente de dos enteros. Se pueden expresar como fracción.

EN SÍMBOLOS:

$$\mathbb{Q} = \left\{ x \in \mathbb{Q} / x = \frac{a}{b}; a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}$$

Los números racionales representan partes de un todo.

También, los números racionales, se caracterizan por su expresión decimal:

$$x \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow \begin{cases} x & \text{es un número entero} \\ 0 \\ x & \text{es un número que tiene una expresión decimal} \end{cases}$$

Las partes sombreadas de los siguientes objetos están representadas por números racionales.

Observe que:

Si $b = 1$ o $b = -1$, $\frac{a}{1} = a$ y $\frac{a}{-1} = -a$ son enteros.

Entonces «Todos los enteros son racionales». Es decir $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$

Notación decimal

$$\frac{2}{8} = \frac{1}{4} = \frac{3}{12} = \frac{6}{24} = 0,25 \rightarrow \text{Decimal exacto.}$$

$$\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{6}{9} = 0,666.. = 0,\widehat{6} \rightarrow \text{Decimal periódico puro, de periodo 6.}$$

$$1 + \frac{3}{4} = 1\frac{3}{4} = 1,75 \rightarrow \text{Decimal exacto.}$$

$$\frac{2}{6} + \frac{4}{6} + \frac{1}{6} + 1 = \frac{7}{6} + 1 = \frac{13}{6} = 2,1\widehat{6} \rightarrow \text{Decimal periódico mixto, de periodo 6 y anteperiodo 1.}$$

Para poder revisar todo el contenido de esta edición,
visite nuestra **tienda virtual**.